Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Mathematik 1

Wintersemester 2014/15

Übungsblatt 3

Aufgabe 8 (Erweitertes Newton-Schema)
Mithilfe der Überlegungen aus Aufgabe 7 lässt sich das Newton-Schema derart erweitern, dass außer dem Interpolationspolynom auch alle Ableitungen des Polynoms an einer Stelle x berechnet werden können.
Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ zu den Daten

x_j	0	1	2	3	4
y_j	0	1	-2	9	28

Berechnen Sie zudem mit diesem Newton-Schema auch alle Ableitungen von p_4 an der Stelle $x = -1$.

Lösung:
Das vollständige Newton-Schema zu den gegebenen Daten und den zugehörigen Erweiterungen für die Ableitungen lautet

x_i	y_i	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$
-1	-47				-1
				13	
-1	-47		-55		-1
		90		12	
-1	-47		-43		-1
		47		10	
0	0		-23		-1
		1		7	
1	1		-2		-1
		-3		3	
2	-2		7		-1
		11		-1	
3	9		4		
		19			
4	28				

Die -1 Einträge in der letzten Spalte folgen aus der Tatsache, dass die 4-te Ableitung von p_4 konstant ist und der Aussage von Lemma 2.5. Die grauen hinterlegten Werte wurden mittels

$$\delta^j y[x, x_0, \dots, x_{j-1}] = \delta^j y[x_1, \dots, x_j] - (x_j - x)\delta^{j+1} y[x, x_0, \dots, x_j]$$

rekursiv von hinten nach vorne ermittelt. Wir erhalten das Interpolationspolynom

$$p_4(x) = \boxed{0} + \boxed{1}\,x - \boxed{2}\,x(x-1) + \boxed{3}\,x(x-1)(x-2) - \boxed{1}\,x(x-1)(x-2)(x-3)\,.$$

Außerdem ergeben sich die Ableitungen an der Stelle -1 nach Aufgabe 7 durch

$$\begin{aligned}
p^{(0)}(-1) &= 0!\,\delta^0 y[-1] = 1 \cdot (\boxed{-47}) = -47\\
p^{(1)}(-1) &= 1!\,\delta^1 y[-1,-1] = 1 \cdot \boxed{90} = 90\\
p^{(2)}(-1) &= 2!\,\delta^2 y[-1,-1,-1] = 2 \cdot (\boxed{-55}) = -110\\
p^{(3)}(-1) &= 3!\,\delta^3 y[-1,-1,-1,-1] = 6 \cdot \boxed{13} = 78\\
p^{(4)}(-1) &= 4!\,\delta^4 y[-1,-1,-1,-1,-1] = 24 \cdot (\boxed{-1}) = -24\\
p^{(n)}(-1) &= 0, \quad n \geq 5\,.
\end{aligned}$$