

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen  
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 1

23.04.2014

**Aufgabe 1 (Vorwärtssubstitution)** (6 Punkte)

Formulieren Sie einen Algorithmus zum Lösen des Gleichungssystems  $Ly = b$ , wobei  $L$  eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist. Geben Sie die Formel zur Berechnung von  $y_i$  an. Wieviele und welche Operationen (Multiplikation + Addition = Operation) sind zur Bestimmung von  $y$  nötig? Was ändert sich jeweils, wenn auf der Diagonalen von  $L$  nur Einsen stehen?

**Aufgabe 2 (LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche)** (10 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -8 \\ -1 & -4 & -8 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix  $A$  mit Spaltenpivotsuche und lösen Sie damit das LGS  $Ax = b$ . Geben Sie dabei die Permutationsmatrix  $P$ , sowie  $L$  und  $R$  explizit an. Geben Sie außerdem die Determinante der Matrix  $A$  an.

**Aufgabe 3 (Normen und Kondition)** (5+5+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie folgende Matrixnormen:

$$(i) \left\| \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_1, \quad (ii) \left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2, \quad (iii) \left\| \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

(b) Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$  und  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär.

(i) Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\|_P = \|Px\| \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  definiert wird. Begründen Sie dabei jeden Schritt ausreichend!

(ii) Bestimmen Sie die zugehörige Matrixnorm  $\|\cdot\|_P$ , in Abhängigkeit der zugehörigen Matrixnorm  $\|\cdot\|$ .

(c) Bestimmen Sie die Kondition  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

ohne die Inverse von  $A$  zu berechnen.

**Aufgabe 4 (Definitheit und Cholesky-Zerlegung)** (6+4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie mit Mitteln der Vorlesung, ob die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

positiv definit sind.

(b) Seien  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{N \times M}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{M \times M}$  und

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$$

sei symmetrisch und positiv definit. Die Cholesky-Zerlegung von  $Z$  sei gegeben durch  $LL^T = Z$  mit

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},$$

sowie  $L_{11} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $L_{21} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  und  $L_{22} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ . Zeigen Sie, dass das Schur-Komplement

$$D = C - B^T A^{-1} B$$

symmetrisch und positiv definit ist und geben Sie die Cholesky-Zerlegung von  $D$  an.

Weitere Informationen finden Sie auf der Rückseite

**Abgabe der Übungsblätter:**

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 08. Mai 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 09. Mai 2014 statt.

**Service/Material:**

**Infos:** Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter <https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173> für die Teilnahme an den Übungen.