Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2014
Dr. Daniel Weiß, Dr. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 1 - Lösung zur Aufgabe 4

09.05.2014

Aufgabe 4 (Definitheit und Cholesky-Zerlegung) (6+4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie mit Mitteln der Vorlesung, ob die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

positiv definit sind.

(b) Seien $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $C \in \mathbb{R}^{M\times M}$ und

$$Z = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$$

sei symmetrisch und positiv definit. Die Cholesky-Zerlegung von Z sei gegeben durch $LL^T = Z$ mit

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},$$

sowie $L_{11} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ und $L_{22} \in \mathbb{R}^{M\times M}$. Zeigen Sie, dass das *Schur-Komplement*

$$D = C - B^T A^{-1} B$$

symmetrisch und positiv definit ist und geben Sie die Cholesky-Zerlegung von D an.

Lösung zur Aufgabe 4

(a) Versuche, eine Cholesky-Zerlegung für A_1 bzw. A_2 zu erstellen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechne Cholesky-Zerlegung von $A_1 = LL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1 \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-1}{1} = -1 \\
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}\cdot l_{21}} = \sqrt{13-9} = 2 \\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}\cdot l_{21}}{l_{22}} = \frac{1+3}{2} = 2 \\
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}\cdot l_{31} - l_{32}\cdot l_{32}} = \sqrt{6-1-4} = 1
\end{aligned}$$

Damit existiert L und die Matrix ist positiv definit .

Betrachte nun

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

und berechne eine Cholesky-Zerlegung:

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{6}{2} = 3 \\
l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}\cdot l_{21}} = \sqrt{5-4} = 1 \\
l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}\cdot l_{21}}{l_{22}} = \frac{5-3}{1} = 2 \\
l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}\cdot l_{31} - l_{32}\cdot l_{32}} = \sqrt{9-9-4} \notin \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Wegen $9-9-4 = -4 < 0$ ist die Matrix nicht positiv definit .

(b) Symmetrie: $D^T = (C - B^T A^{-1} B)^T = C^T - B^T (A^{-1})^T B = C - B^T A^{-1} B = D$ (oder später über $L_{22} L_{22}^T$) .

$LL^T = \begin{pmatrix} L_1 1 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^T & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} L_{11}^T & L_{11} L_{21}^T \\ L_{21} L_{11}^T & L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T \end{pmatrix}.$

Somit gilt: $A = L_{11} L_{11}^T$, $B = L_{11} L_{21}^T$, $C = L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T$.

$$\begin{aligned} D &= C - B^T A^{-1} B \\ &= L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T - L_{21} L_{11}^T (L_{11}^T)^{-1} L_{11}^{-1} L_{11} L_{21}^T \\ &= L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T - L_{21} L_{21}^T \\ &= L_{22} L_{22}^T \end{aligned}$$

Da L_{22} untere Dreiecksmatrix ist, ist die Cholesky-Zerlegung von D gegeben durch $L_{22} L_{22}^T$.

D ist positiv definit: sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^M$: $x^T D x = x^T L_{22} L_{22}^T x = (L_{22}^T x)^T \cdot L_{22}^T x > 0$ (Skalarprodukt)