Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2014
Dr. Daniel Weiß, Dr. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 2

09.05.2014

Aufgabe 5 (Determinanten-Abschätzung mit Hilfe von QR) (5 Punkte)

Es sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regulär. Zeigen Sie mit Hilfe der QR-Faktorisierung die *hadamardsche Determinantenabschätzung*

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2} .$$

Aufgabe 6 (Householder-Transformation) (1+1.5+2.5 Punkte)

Zur Berechnung einer QR-Zerlegung kann unter anderen eine Householder-Transformation durchgeführt werden. Die Householder-Transformation berechnet sich mit einem gegebenen $v \in \mathbb{R}^N$ über

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T .$$

Zeigen Sie:

(a) H ist symmetrisch.

(b) H ist orthogonal, das heißt $H^{-1} = H^T$.

(c) H besitzt die Eigenwerte 1 (mit Vielfachheit $N-1$) und -1 (mit Vielfachheit 1).

Aufgabe 7 (Ausgleichsproblem) (2+4+2 Punkte)

Der große Bobbit Hilbo Teublin - unterwegs als Gelegenheitsdieb - ist auf der Suche nach einem außergewöhnlichen kargen Stein, den er in einem sehr belebten Berg vermutet. Dort lebt insbesondere der liebe Drache Guams, der den kargen Stein bewacht. Als Hilbo in seine Höhle eindringt, findet er zunächst nichts vor. Noch nicht mal irgendwelche Reichtümer. Nur ein kleiner verspielter Drache, der hin- und herfliegt und gelegentlich seinen Feueratem zum Besten gibt. Hilbo hat die Theorie, dass Guams immer in Richtung des kargen Steins blickt, wenn das Feuer aus seinem Rachen brodelt.

Um seine Daten zu sichern, benutzt er ein (x, y)-Koordinatensystem und notiert sich die Tangenswerte der Richtungswinkel α, die von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen werden.

Standort	1	2	3	4	5
X-Koordinate	8	2	4	4	7
Y-Koordinate	2	3	7	12	16
$\tan\alpha$	2	0.5	0	-0.5	-2

(*) Die Geschichte und alle Namen wurden vom Übungsleiter frei erfunden. Zufällige Ähnlichkeiten zu bekannten Begebenheiten sind gewollt, es werden allerdings keine zu finden sein.

(a) Stellen Sie die Situation anhand einer Skizze dar und schätzen Sie den Ort $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des kargen Steins.

(b) Jede Messung entspricht einer Geradengleichung in den Unbekannten (x, y). Stellen Sie mit Hilfe aller Messungen ein lineares Ausgleichsproblem auf.

(c) Berechnen und lösen Sie die das Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalengleichung.

Aufgabe 8 (Wurzelberechnung) (3+6 Punkte)

(a) Formulieren Sie ein Newton-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, $a \in \mathbb{R}$.

(b) Wir betrachten nun das Newton-Verfahren zur Lösung von $\sqrt[3]{1}$ in der komplexen Ebene, d.h. $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Gesucht sind die m-ten Einheitswurzeln $\zeta_m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}m\pi}$, $m = 0, 1, 2$. Ein Computer kann (ohne explizite Programmierung) mit komplexen Zahlen allerdings nicht umgehen. Formulieren Sie das Newton-Verfahren für $\sqrt[3]{1}$ im komplexen Fall so um, dass ein Problem im $\mathbb{R}^2$ gelöst wird.

Aufgabe 9 (Computerdivision) (2+6+3+2 Punkte)

Die Berechnung des Kehrwerts einer reellen Zahl $d > 0$ kann mit dem Newton-Verfahren so realisiert werden, dass zur Berechnung nur Additionen und Multiplikationen verwendet werden.

(a) Formulieren Sie die Berechnung von $\frac{1}{d}$ als Nullstellenproblem $f(x) = 0$ so, dass das zugehörige Newton-Verfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ohne Division auskommt.

(b) Geben Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes ein Intervall an, für das das Newton-Verfahren konvergiert. Geben Sie auch einen Startwert x_0 an, für den das Verfahren nicht gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \in (0, \frac{1}{d})$ gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

(d) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Berechnung von $\frac{1}{9}$ mit Startwert $x_0 = 0.1$ durch.

Bemerkung: Auch zur Matrixinvertierung kann ein solches Verfahren konstruiert werden.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 22. Mai 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 23. Mai 2014 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173 für die Teilnahme an den Übungen.