Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2014
Dr. Daniel Weiß, Dr. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 2 - Lösung zur Aufgabe 9

23.05.2014

Aufgabe 9 (Computerdivision) (2+6+3+2 Punkte)

Die Berechnung des Kehrwerts einer reellen Zahl $d > 0$ kann mit dem Newton-Verfahren so realisiert werden, dass zur Berechnung nur Additionen und Multiplikationen verwendet werden.

(a) Formulieren Sie die Berechnung von $\frac{1}{d}$ als Nullstellenproblem $f(x) = 0$ so, dass das zugehörige Newton-Verfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ohne Division auskommt.

(b) Geben Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes ein Intervall an, für das das Newton-Verfahren konvergiert. Geben Sie auch einen Startwert x_0 an, für den das Verfahren nicht gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \in (0, \frac{1}{d})$ gegen die gesuchte Lösung konvergiert.

(d) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Berechnung von $\frac{1}{9}$ mit Startwert $x_0 = 0.1$ durch.

Bemerkung: Auch zur Matrixinvertierung kann ein solches Verfahren konstruiert werden.

Lösung zur Aufgabe 9

(a) Mit $\frac{1}{d} = x \Leftrightarrow \frac{1}{dx} = 1$ formuliert man das das Nullstellenproblem $f(x) = \frac{1}{xd} - 1 = 0$. Die Ableitung ist dann $f'(x) = \frac{-1}{dx^2}$ und somit lautet eine mögliche Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = x_k - (-dx_k^2)\left(\frac{1}{x_k d} - 1\right) = 2x_k - dx_k^2 = x_k(2 - dx_k)$$

(b) Φ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt $(\frac{1}{d}, \frac{1}{d})$ und geht durch $(0,0)$ und $(\frac{2}{d}, 0)$.

- Kontraktion: $\Phi'(x) = 2 - 2dx = 2(1 - dx)$, $\Phi''(x) = -2d < 0$.
  $|\Phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow |1 - dx| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2d}, \frac{3}{2d}\right)$.
- Selbstabbildung: Wir untersuchen den Extrempunkt, sowie die beiden Randpunkte $\frac{1}{2d}, \frac{1}{d}, \frac{3}{2d}$:

  $$\Phi(\frac{3}{2d}) = \Phi(\frac{1}{2d}) = \frac{2}{2d} - d\frac{1}{4d^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{2d} \in (\frac{1}{2d}, \frac{3}{2d}) \qquad \Phi(\frac{1}{d}) = \frac{1}{d} \in (\frac{1}{2d}, \frac{3}{2d})$$

  Das heißt Φ ist Selbstabbildung auf dem Intervall $(\frac{1}{2d}, \frac{3}{2d})$. Insbesondere werden die Randpunkte mit "Abstand" zum Rand abgebildet.

Da das Intervall abgeschlossen sein soll, konvergiert das Newton-Verfahren für jedes $x_k \in [\frac{1}{2d} + \delta, \frac{3}{2d} - \delta]$ für $\delta > 0$ beliebig klein (die Selbstabbildung bleibt aufgrund der Stetigkeit und dem "Abstand" zum Rand erhalten).

Der Wert 0 ist ebenfalls Fixpunkt von Φ. Daher konvergiert das Newton-Verfahren für $x_0 = 0$ nicht gegen $\frac{1}{d}$.

(c) Noch zu zeigen: Das Verfahren konvergiert für $x_0 \in (0, \frac{1}{2d}]$. Sei also $x_0 \in (0, \frac{1}{2d}]$. Dann:

$$x_1 = x_0(2 - d\underbrace{x_0}_{<\frac{1}{2d}}) \geq x_0(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}x_0$$

und $x_1 < 2x_0$. Solange $x_k \leq \frac{1}{2d}$, folgt induktiv: $x^{n+1} \geq (\frac{3}{2})^{n+1}x_0$, also ex. ein $k = k(x_0) \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in (\frac{1}{2d}, \frac{1}{d}]$. Damit befindet sich die Iteration irgendwann im Intervall aus Aufgabenteil b).

(d)

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.1 \\ x_1 &= 0.1 \cdot (2 - 9 \cdot 0.1) = 0.1 \cdot 1.1 = 0.11 \\ x_2 &= 0.11 \cdot (2 - 9 \cdot 0.11) = 0.11 \cdot 1.01 = 0.1111 \\ \{x_3 &= 0.1111 \cdot (2 - 9 \cdot 0.1111) = 0.1111 \cdot 1.0001 = 0.11111111\} \end{aligned}$$

Hierbei kann man sehr gut die quadratische Konvergenz erkennen.