Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 3

23.05.2014

Aufgabe 10 (cg-Verfahren) (5 Punkte)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrischen positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $x, b \in \mathbb{R}^N$. Über die Matrix A sei bekannt, dass die Eigenwerte im Intervall $[7, 28]$ liegen. Für das LGS $Ax = b$ sollen so viele Iterationsschritte des cg-Verfahrens (ohne Vorkonditionierung) durchgeführt werden, dass die Abschätzung

$$\left|x^k - x^\star\right|_A < \epsilon\left|x^0 - x^\star\right|_A, \quad (0 < \epsilon \ll 1)$$

für die k-te Iterierte erfüllt ist. Zeigen Sie, dass dies in exakter Arithmetik nach spätestens

$$k \geq \frac{\log(2) - \log(\epsilon)}{\log(3)}$$

Schritten garantiert werden kann.

Aufgabe 11 (Krylov-Räume) (8 Punkte)

Zu einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^N$ definieren wir den k-ten Krylov-Raum

$$\mathcal{K}_k(A, b) = \operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\}\,.$$

Zudem sei $x^\star \in \mathbb{R}^N$ Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Vektoren $b, Ab, \ldots, A^k b$ sind linear abhängig.

(2) Es gilt $\mathcal{K}_k(A, b) = \mathcal{K}_{k+1}(A, b)$.

(3) Es gilt $A\mathcal{K}_k(A, b) \subset \mathcal{K}_k(A, b)$, d.h. für alle $y \in \mathcal{K}_k(A, b)$ gilt $Ay \in \mathcal{K}_k(A, b)$.

(4) es existiert ein linearer Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ mit $\dim \mathcal{M} \leq k$, für den $b \in \mathcal{M}$ gilt und der bezüglich der Matrix A invariant ist, also $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$

(5) Es gilt $x^\star \in \mathcal{K}_k(A, b)$.

Hinweis: Beweisen Sie die Äquivalenz über
$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$, $(3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$.

Aufgabe 12 (Lagrange-Polynome) (3+8 Punkte)

Zu den verschiedenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ seien $L_i(x)$ die Lagrange-Polynome und $c_i := L_i(0)$. Zeigen Sie:

(a)
$$\sum_{i=0}^n L_i(x) \equiv 1\,.$$

(b)
$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^s = \begin{cases} 1 & \text{für } s = 0\,, \\ 0 & \text{für } s = 1, 2, \ldots, n\,, \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & \text{für } s = n+1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 13 (Interpolationspolynom nach Newton) (5+3+8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2}{3+x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ und die Knoten $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3 zu f in Newton-Gestalt.

(b) Durch Hinzunahme des Knotens $x_4 = 0$ soll f neu interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 mit möglichst geringem Aufwand.

(c) Beweisen Sie für das Interpolationspolynom p_3 aus (a) die Fehlerabschätzung

$$\max_{x\in[-2,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq 8\,.$$

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 05. Juni 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 06. Juni 2014 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173 für die Teilnahme an den Übungen.