Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2014
Dr. Daniel Weiß, Dr. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 4

06.06.2014

Aufgabe 14 (dividierte Differenzen) (10 Punkte)

Betrachten Sie das dividierte Differenzenschema zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ zu einer Funktion f. Sei $p(x)$ das zugehörige Interpolationspolynom. Erweitern Sie das Schema von „oben" mit der (allgemeinen) Stützstelle x und dem Funktionswert $p(x)$:

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
\mathbf{x} & \mathbf{p(x) = b_0} & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_0 & f_0 = f_{0,0} & \rightarrow & \mathbf{b_1} & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_1 & f_1 = f_{1,1} & \rightarrow & f_{0,1} & \rightarrow & \mathbf{b_2} & & & & \\
 & & & & & & \searrow & & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & \searrow & & & & \searrow & & \searrow & \\
x_{n-1} & f_{n-1} = f_{n-1,n-1} & \rightarrow & & \cdots & & \rightarrow & f_{0,n-1} & \rightarrow & \mathbf{b_n} \\
 & & \searrow & & & & & & \searrow & \\
x_n & f_n = f_{n,n} & \rightarrow & & \cdots & & \rightarrow & f_{1,n} & \rightarrow & f_{0,n}
\end{array}
$$

(a) Leiten Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $p(x)$ her, indem Sie sich zuerst überlegen, welchen Wert b_n annehmen muss und von dort sukzessive b_{n-1} bis b_0 berechnen.

(b) Berechnen Sie den Aufwand Ihres Algorithmus (betrachten Sie hierbei die Anzahl der Additionen und Multiplikationen getrennt) und vergleichen Sie diesen mit der „direkten" Berechnung von $p(x)$ in Newtondarstellung. Hierbei darf davon ausgegangen werden, dass die Berechnung von $\omega_k(x)$ nicht jedes Mal komplett neu berechnet werden muss, sondern vorige Werte benutzt werden können.

Aufgabe 15 (Clenshaw-Algorithmus) (10 Punkte)

Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1T_1(x) + \cdots + c_nT_n(x)\,.$$

Falls

$$
\begin{aligned}
d_k &= c_k + 2xd_{k+1} - d_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0\,,\\
e_k &= d_k + 2xe_{k+1} - e_{k+2} \quad (k = n, n-1, \dots, 0), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0\,,
\end{aligned}
$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ableitung $p'(x) = \frac{1}{2}(d_0' - d_2')$, stellen eine Behauptung zu einem Zusammenhang zwischen d_i' und e_{i+1} auf und beweisen Sie diesen.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 12. Juni 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 13. Juni 2014 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173 für die Teilnahme an den Übungen.

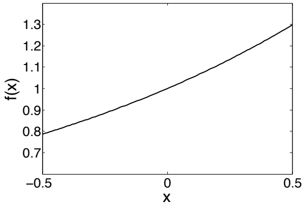
Beachten Sie die freiwillige Aufgabe auf der Rückseite und den frühen Rückgabetermin!

Aufgabe 16 (Zusatzaufgabe (freiwillig) – Gleitkommarechnung)

Die Funktion

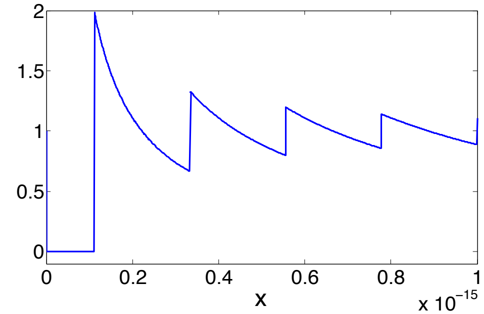
$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$$

lässt sich im Punkt $x = 0$ durch $f(0) := 1$ stetig fortsetzen.



Der folgende Algorithmus wertet die Funktion an der Stelle x aus.

```
# Algorithmus
if (x==0)
    f=1;
else
    f=(exp(x)-1)/x;
end
```



Begründen Sie den Verlauf des Graphen im Plot, der durch Auswertung des Algorithmus für $|x| \ll 1$, genauer $0 \leq x \leq 10^{-15}$, generiert wurde.