Numerische Mathematik für die Fachrichtungen
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 5

13.06.2014

Aufgabe 17 (Fehlerabschätzung eines Polygonzugs) (5 Punkte)

Sei $a := t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n =: b$ eine Knotenverteilung im Intervall $I = [a, b]$. Für eine stetige Funktion g ist der stetig interpolierende Linienzug $\mathcal{I}g$ definiert durch die zwei Eigenschaften

- $\mathcal{I}g(t_i) = g(t_i)$ für $i = 0, \ldots, n$,
- $\mathcal{I}g|_{[t_i,t_{i+1}]}$ ist ein Polynom ersten Grades für $i = 0, \ldots, n-1$.

Zeigen Sie: Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion g gilt

$$|g - \mathcal{I}g|_\infty \leq \frac{h^2}{8} |g''|_\infty \,,$$

wobei $h := \max_{0 \leq i \leq n-1}(t_{i+1} - t_i)$ der Gitterweitenparameter ist.

Hinweis: Einen solchen Polygonzug nennt man auch "linearer Spline".

Aufgabe 18 (kubischer Spline) (10 Punkte)

Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $S_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S(t) = \begin{cases} (t+1)^4 + \alpha(t-1)^4 + 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -t^3 - 8\alpha t + \gamma, & 0 < t \leq 1 \\ \beta t^3 + \delta t^2 + 14t - 1, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\Delta := \{-1, 0, 1, 2\}$ ist.

Aufgabe 19 (Berechnung eines kubischen Spline) (10 Punkte)

Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = |x|$ in den Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ durch einen eingespannten kubischen Spline mit hermiteschen Randbedingungen bezüglich f.

Aufgabe 20 (Bernsteinpolynome) (15 Punkte)

Die Bernstein-Polynome vom Grad n sind definiert über

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n \,.$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

(a) $\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) = 1 \quad \forall\, t \in [0, 1]$.

(b) $B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1$, $B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0, 1 \leq k \leq n-1$.

(c) B_k^n hat genau ein Maximum in $[0, 1]$ und zwar bei $t = \frac{k}{n}$.

(d) Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$B_k^n(t) = (1-t) B_k^{n-1}(t) + t B_{k-1}^{n-1}(t) \,.$$

(e) Die Bernstein-Polynome $\{B_k^n, k = 0, \ldots, n\}$ bilden eine Basis des Polynomraumes $\mathcal{P}_n$.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 26. Juni 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 27. Juni 2014 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173 für die Teilnahme an den Übungen.