

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen  
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 6

27.06.2014

**Aufgabe 21 (Anwendung von Quadraturformeln)**

(8 Punkte)

Berechnen Sie den Wert von  $\int_0^{\pi/2} \sin(t) dt$

- (a) analytisch,
- (b) mit der Simpson-Regel (einmalige Anwendung)
- (c) mit der zusammengesetzten Trapezregel mit den Werten aus der Tabelle,

$t$	$\sin(t)$
0	0
$\pi/6$	0.5
$\pi/4$	$0.5\sqrt{2}$
$\pi/3$	$0.5\sqrt{3}$
$\pi/2$	1

**Hinweis:** Die zusammengesetzte Trapezregel wendet die Trapezregel auf jedes Teilintervall an und summiert diese auf.

**Aufgabe 22 (Bestimmung einer Quadraturformel)**

(7 Punkte)

Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

Bestimmen Sie eine Quadraturformel mit Knoten  $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = 1$  von maximaler Ordnung. Welche Ordnung besitzt sie?

**Aufgabe 23 (Fehlerabschätzung der Rechtecksregel)**

(11 Punkte)

Sei  $f \in C^1[a, b]$  und  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine äquidistante Unterteilung von  $[a, b]$ , also  $x_i = a + ih$  mit  $h = \frac{b-a}{n}$ . Die zusammengesetzte (linksseitige) Rechtecksregel ist gegeben durch  $I_0(f) = \sum_{i=1}^n hf(x_{i-1})$ . Zeigen Sie die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(t) dt - I_0(f) \right| \leq \frac{b-a}{2} h \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

**Aufgabe 24 (Kubatur)**

(14 Punkte)

Auf dem Einheitsdreieck  $T = \text{co}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$  sei eine Funktion  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben (hierbei bezeichnet  $\text{co}$  die konvexe Hülle über alle gegebenen Punkte). Zeigen Sie, dass die Quadraturformel zur Integration über das Einheitsdreieck

$$I(f) = \frac{1}{6} \left( f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)$$

für  $f \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$  exakt ist. Beachten Sie hierbei, dass  $P \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$  die Form

$$P(x) = P(x_1, x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2,$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, 5$  besitzt und folglich  $\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)) = 6$  ist.

**Abgabe der Übungsblätter:**

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 10. Juli 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitze **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 11. Juli 2014 statt.

**Service/Material:**

**Infos:** Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter <https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173> für die Teilnahme an den Übungen.