Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 7

11.07.2014

Aufgabe 25 (Anwendung des expliziten Eulers) (1+7+2+3=13 Punkte)

Mit dem *expliziten Euler-Verfahren* werden zu diskreten Zeitpunkten

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

Näherungswerte y_i für die Funktionswerte $y(t_i)$ der Lösung y eines Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \qquad \text{für } t \geq t_0\,, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

nach folgender Vorschrift iterativ berechnet:

$$y_{i+1} := y_i + \tau_i f(t_i, y_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Hierbei ist $\tau_i := t_{i+1} - t_i$ die *Schrittweite* des Verfahrens im i-ten Schritt.

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= 2t + 1 \qquad \text{für } t \geq 0 \\ y(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren einen Näherungswert für $y(1)$ für die konstanten Schrittweiten $\tau = 1, \tau = \frac{1}{2}, \tau = \frac{1}{4}$. Hierbei bezeichnet y die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie den absoluten Fehler zu jedem Zeitpunkt t_i.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t)^2 \qquad \text{für } t \geq 1\,, \\ y(1) &= 1\,. \end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren einen Näherungswert für $y(2)$ für die konstanten Schrittweiten $\tau = 1, \tau = \frac{1}{2}$. Hierbei bezeichnet y die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabenteil (c).

Aufgabe 26 (Bestimmung einer Lösung mit expl. Euler) (7 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -\frac{y}{1+t}, \qquad t \geq 0, \qquad y(0) = 1\,.$$

Das Anfangswertproblem soll numerisch mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahren gelöst werden. Geben Sie die Näherungslösung $y_i^{(N)} \approx y(ih^{(N)}), i \geq 0$ zur Schrittweite $h^{(N)} = t_{\text{end}}/N$ ($t_{\text{end}} > 0$) explizit an (Geben Sie eine Behauptung für y_i an und beweisen Sie diese per Induktion). Bestimmen Sie damit den exakten Wert $y(t_{\text{end}})$ und daraus die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 27 (freiwillige Aufgabe: Expliziter Euler) (4 Zusatz - Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t), \qquad t \in [a, b]\,, \\ y(a) &= 0 \end{aligned}$$

mit einer gegebenen hinreichend glatten Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = (b - a)/n$ auf das Anfangswertproblem an. Welchen Wert erhalten Sie für zum Endzeitpunkt b nach n Schritten? Welchem Verfahren (vergleiche bisherige Übungsblätter) entspricht dies?

Aufgabe 28 (freiwillige Aufgabe: Runge-Kutta-Verf.) (9 Zusatz - Punkte)

Zeigen Sie, dass das klassische Runge-Kutta-Verfahren

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}\tau(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}\tau, u_n + \frac{1}{2}\tau k_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{1}{2}\tau, u_n + \frac{1}{2}\tau k_2) \\ k_4 &= f(t_n + \tau, u_n + \tau k_3) \end{aligned}$$

angewandt auf die Differentialgleichung

$$\dot{u} = \lambda u\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant}$$

die Iteration

$$u_{n+1} = (1 + \tau\lambda + \frac{1}{2}\tau^2\lambda^2 + \frac{1}{6}\tau^3\lambda^3 + \frac{1}{24}\tau^4\lambda^4)u_n$$

liefert und vergleichen Sie diese mit der Taylorentwicklung von $u(t_{n+1}) = u(t_n + \tau)$ an t_n.

Geben Sie eine Aussage zur Ordnung an, sowie eine Vermutung zur Stabilität, wenn τ zwar klein, aber $|\tau\lambda|$ groß ist.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, 17. Juli 2014, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 18. Juli 2014 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa2014s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/173 für die Teilnahme an den Übungen.