7 Orthogonalpolynome

Zu $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und einem Gewicht $W \in \mathrm{L}_\infty(a,b)$, $W > 0$ definiere $V = \mathrm{L}_2(a,b)$ als Euklidischen Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_V = \int_a^b u(t)v(t)W(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe: Zu $f \in V$ bestimme $P \in \mathbb{P}_N$ mit

$$\|P - f\|_V = \min_{Q \in \mathbb{P}_N} \|Q - f\|_V\,.$$

Sei $Q_0, \dots, Q_N \in \mathbb{P}_N$ eine Orthogonalbasis. Dann gilt $P(t) = \sum_{k=0}^{N} (f, Q_k)_V \; Q_k(t)$.

(7.1) Eine orthogonale Basis Q_n, $n = 0,1,2,...$ berechnet sich mit $Q_{-1} \equiv 0$, $Q_0 \equiv \frac{1}{\rho_0}$ und

$$\rho_{n+1} Q_{n+1}(t) = (t - \beta_n)\; Q_n(t) - \rho_n\; Q_{n-1}(t) \qquad n = 0,1,2,...$$

mit $\rho_0 = \|1\|_V$, $\rho_n = (Q_n, tQ_{n-1})_V > 0$, und $\beta_n = (Q_n, tQ_n)_V$. Es gilt $\operatorname{grad} Q_n = n$.

(7.2) Das Orthogonalpolynom Q_n besitzt n verschiedene Nullstellen in (a,b).

Die Orthogonalpolynome $Q_0, Q_1, Q_2, ...$ bilden eine Sturmsche Kette.

7 Orthogonalpolynome – Chebychev-Polynome

Wir betrachten den Fall $(a,b) = (-1,1)$ und $W(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Definiere $T_0 \equiv 1$, $T_1(t) = t$ und $T_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ mit $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$.
Für $t \in [-1,1]$ gilt

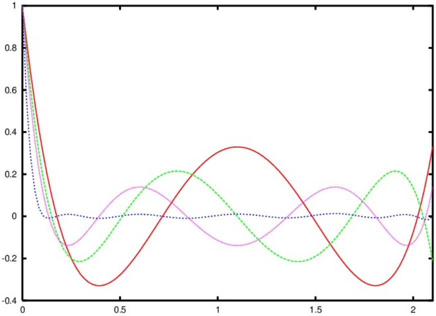
$$T_n(t) = \cos(n \arccos t)\,,$$

$(T_n, T_k)_V = 0$ für $n \neq k$, und für $|t| \geq 1$ gilt $T_n(t) = \dfrac{1}{2}\Big(t + \sqrt{t^2-1}\Big)^n + \dfrac{1}{2}\Big(t - \sqrt{t^2-1}\Big)^n$.

(7.3) Sei $\xi \notin [-1,1]$ und $P(t) = T_n(t)/T_n(\xi)$.
Dann gilt $\max\limits_{t\in[-1,1]} |P(t)| \leq \max\limits_{t\in[-1,1]} |Q(t)|$ für alle $Q \in \mathbb{P}_n$ mit $Q(\xi) = 1$.

(7.4) Sei $0 < \alpha < \beta$ und $\kappa = \beta/\alpha$.
Dann existiert ein $P \in \mathbb{P}_n$ mit $P(0) = 1$
und $\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |P(x)| \leq 2\left(\dfrac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^n$.

Transformierte Chebychev-Polynome
P_4, P_5, P_6, P_{12} mit $P_n(0) = 1$
zu $[\alpha,\beta] = [0.1, 2.1]$



7 Orthogonalpolynome

(7.5) Approximationssatz von Weierstraß
Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Dann gilt:
Jede stetige Funktion $f \in \mathrm{C}[a,b]$ lässt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren.

Konstruktion: O.E. sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(t) = 0$ für $|t| > 0.5$ und $[a,b] = [-0.25, 0.25]$. Dann wähle

$$P_{2n}(t) = \frac{1}{r_n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n f(s-t)\,\mathrm{d}s\,, \qquad r_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t\,.$$

Für $|t| \le 0.25$ gilt $P_{2n}(t) = \frac{1}{r_n}\sum\limits_{j,k=0}^{n} a_{nkj}t^k \int\limits_{-1}^{1} s^j f(s)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{P}_{2n}$ mit $\big(1-(s-t)^2\big)^n = \sum\limits_{j,k=0}^{2n} a_{nkj}t^k s^j$.

Nun sei $(v,w)_0 = \int\limits_{-1}^{1} v(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ das Skalarprodukt in $\mathrm{L}_2(-1,1)$, seien $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ die Orthogonalpolynonme, und sei $\Pi_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n}(f,Q_k)_0 Q_k$ die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{P}_n$.

(7.6) Für jede stetig Funktion $f \in \mathrm{C}[-1,1]$ gilt $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|\Pi_n(f) - f\|_0 = 0$.

(7.7) Sei $f \in \mathrm{C}^k[-1,1]$. Dann existiert $C > 0$ mit $\|\Pi_n(f) - f\|_0 \le Cn^{-k}\sum\limits_{j=1}^{k}\left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^j f\right\|_0$.

7 Approximation in der Supremumsnorm

Karlsruhe Institute of Technology

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ die Supremumsnorm.

(7.8) $\Xi = \{\xi_0 < \xi_1 < \cdots \xi_N < \xi_{N+1}\} \subset [a,b]$ heißt *Alternante* zu $P \in \mathbb{P}_N$ und $f \in C[a,b]$, falls

$$\big(f(\xi_k) - P(\xi_k)\big)\big(f(\xi_{k+1}) - P(\xi_{k+1})\big) < 0 \qquad \text{für} \qquad k = 0,\dots,N.$$

(7.9) Sei $\Xi = \{\xi_0 < \xi_1 < \cdots \xi_N < \xi_{N+1}\} \subset [a,b]$ eine Alternante zu $P^* \in \mathbb{P}_N$ und $f \in C[a,b]$ mit

$$|f(\xi) - P^*(\xi)| = \|f - P^*\|_\infty \qquad \text{für} \qquad \xi \in \Xi.$$

Dann ist P^* die Bestapproximation in $\mathbb{P}_N$, d.h. $\|f - P^*\|_\infty \le \|f - P\|_\infty$ für alle $P \in \mathbb{P}_N$.

(7.10) Zu $\Xi = \{\xi_0 < \xi_1 < \cdots \xi_N < \xi_{N+1}\} \subset [a,b]$ und $f \in C[a,b]$ existiert genau ein $\hat{P} \in \mathbb{P}_N$, so dass Ξ Alternante zu $\hat{P}$ und f ist und mit

$$|f(\xi) - \hat{P}(\xi)| \le |f(\xi) - P(\xi)| \qquad \text{für alle} \qquad P \in \mathbb{P}_N,\ \xi \in \Xi.$$

Dazu bestimme ρ mit $\hat{P}(\xi_k) + (-1)^k\rho = f(\xi_k)$ für $k = 0,\dots,N+1$ durch ein LGS in $\mathbb{R}^{N+2}$.

Remes-Algorithmus

S0) Wähle $\Xi^0 = \{\xi_0^0 < \xi_1^0 < \cdots \xi_N^0 < \xi_{N+1}^0\} \subset [a,b]$, $\varepsilon, \delta > 0$, setze $m = 0$.

S1) Bestimme $P_m \in \mathbb{P}_N$ und ρ_m mit (7.10), so dass Ξ^m Alternante zu P_m und f ist.

S2) Falls $|P_m(t) - f(t)| < |\rho_m| + \varepsilon$ für $t \in \delta\mathbb{Z} \cap [a,b]$, STOP.

S3) Wähle $t \in [a,b] \subset \Xi^m$ mit $|P_m(t) - f(t)| > |\rho_m| + \varepsilon$ und $\xi \in \Xi^m$.
Setze $\Xi^{m+1} = \{t\} \cup \Xi \setminus \{\xi\}$, setze $m := m+1$ und gehe zu S1).

8 Interpolation

(8.1) *Lagrange-Interpolation*
Zu Stützstellen $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N$ und Werten $f_0, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ bestimme $P \in \mathbb{P}_N$ mit $P(\xi_n) = f_n$.

(8.2) Die Interpolationsaufgabe (8.1) ist eindeutig lösbar.

(8.3) *Hermite-Interpolation*
Zu $a \le \xi_0 \le \xi_1 \le \cdots \le \xi_N \le b$ definiere $d_n = \max\{n-k \colon \xi_k = \cdots = \xi_n\}$ und $d = \max d_n$.
Zu $f \in C^d[a,b]$ bestimme $P \in \mathbb{P}_N$ mit

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{d_n} P(\xi_n) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{d_n} f(\xi_n) \quad \text{für} \quad n = 0, \dots, N.$$

(8.4) Die Interpolationsaufgabe (8.3) ist eindeutig lösbar.

(8.5) Der eindeutig bestimmte höchste Koeffizient $b_N \equiv \frac{1}{N!}\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big)^N P(t)$ der Lösung der Interpolationsaufgabe (8.1) wird mit $b_N = f[\xi_0, \dots, \xi_N]$ bezeichnet.

(8.6) Zu $\xi_0 \le \xi_1 \le \cdots \le \xi_N$ definiere die Newton-Basis von $\mathbb{P}_N$ durch $\omega_0 \equiv 1$ und

$$\omega_{k+1}(t) = \omega_k(t)(t - \xi_k), \qquad k = 0, ..., N-1.$$

a) $P(t) = \sum_{k=0}^{N} f[\xi_0, \dots, \xi_k]\omega_k(t)$ löst die Interpolationsaufgabe (8.3).

b) Für $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ gilt $f(t) = P(t) + f[\xi_0, \dots, \xi_N, t]\, \omega_{N+1}(t)$.

8 Interpolation

(8.7) Für $\xi_k < \xi_n$ gilt $f[\xi_k,\dots,\xi_n] = \dfrac{f[\xi_{k+1},\dots,\xi_n] - f[\xi_k,\dots,\xi_{n-1}]}{\xi_n - \xi_k}$.

Sei $f \in \mathrm{C}^{n-k}(\mathbb{R})$. Für $\xi_k = \xi_{k+1} = \dots = \xi_n$ gilt $f[\xi_k,\dots,\xi_n] = \dfrac{1}{(n-k)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n-k} f(\xi_k)$.

Sei $P_{kn}(t) = \sum\limits_{j=k}^{n} f[\xi_k,\dots,\xi_j]\omega_{kj}(t)$ mit $\omega_{kk} \equiv 1$ und mit $\omega_{k,j+1}(t) = \omega_{kj}(t)(t-\xi_j)$ die Interpolation an $\xi_k \le \dots \le \xi_n$ zu f. Für $\xi_k < \xi_n$ gilt $P_{kn}(t) = \frac{t-\xi_k}{\xi_n-\xi_k} P_{k+1,n}(t) + \frac{\xi_n - t}{\xi_n - \xi_k} P_{k,n-1}(t)$.

(8.9) Für den Interpolationsfehler gilt

$$f(t) - P_N(t) = \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{N+1} f(\tau)\ \omega_{N+1}(t)$$

mit einer Zwischenstelle $\tau = \tau(t) \in [\min\{t,\xi_0\}\ \max\{t,\xi_N\}]$.

(8.11) Sei $\Sigma^N = \left\{ \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \colon \sum\limits_{n=0}^{N} s_n = 1, s_n \ge 0 \right\}$ der Standard-Simplex. Es gilt

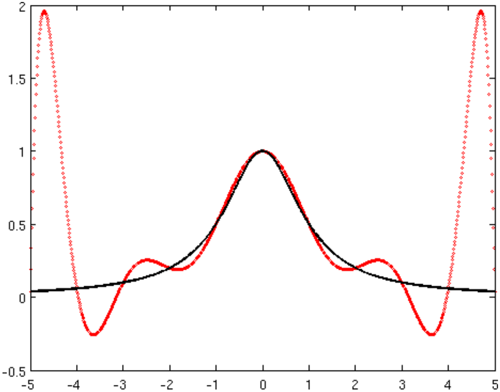
$$f[\xi_0,\dots,\xi_N] = \int_{\Sigma^N} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^N f\Big(\sum_{n=0}^{N} s_n \xi_n\Big)\mathrm{d}s\,.$$

(8.12) $f[\xi_0,\dots,\xi_N] = \frac{1}{N!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^N f(\tau)$ mit $\tau \in [\min \xi_n, \max \xi_n]$.

Runge-Phänomen bei Interpolation

Wir betrachten das Interpolationsproblem für äquidistant verteilte Stützstellen. Wir würden erwarten, dass für eine genügend glatte Funktion die Folge der Interpolationspolynome, gehörig zu immer kleinerem Stützstellenabstand, in der Maximumsnorm gegen die Funktion konvergiert. Dass dem nicht so ist zeigt zum Beispiel das sogenannte Runge-Phänomen für die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad t \in [-5,5]\,.$$



Zu $a \le \xi_0 \le \xi_1 \le \cdots \le \xi_N \le b$ definiere the Interpolation $I_N\colon \mathrm{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{P}_N$ mit

$$I_N(f) = \sum_{k=0}^{N} f(\xi_k) L_{Nk}(t)\,, \qquad L_{Nk}(t) = \prod_{\substack{n=0\\ n\neq k}}^{N} \frac{t-\xi_n}{\xi_k-\xi_n}\,.$$

Dann gilt $\|I_N\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|I_N(f)\|_\infty \le \Lambda_N$ mit der Lebesque-Konstante $\Lambda_N = \max_{t\in[a,b]} \sum_{k=0}^{N} |L_{Nk}(t)|$.

9 Splines

(9.1) Zu einer Zerlegung $\Xi\colon\ a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_N=b$ von $[a,b]$ definiere den Spline-Raum vom Grad k

$$\mathscr{S}_k(\Xi)=\left\{S\in \mathrm{C}^{k-1}[a,b]\colon\ S_n:=S|_{[\xi_{n-1},\xi_n]}\in\mathbb{P}_k,\qquad n=1,\dots,N\right\}.$$

$S\in\mathscr{S}_k(\Xi)$ heißt interpolierender Spline zu $f\in\mathrm{C}^0[a,b]$ wenn $S(\xi_n)=f(\xi_n)$.

(9.2) Es gilt $\dim\mathscr{S}_k(\Xi)=k+N$.

Wir betrachten interpolierende Splines von Grad $k=2r+1$ mit einer der Randbedingungen

(I) Natürliche Randbedingung

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m S(a)=0\quad\text{und}\quad\left(\frac{d}{dt}\right)^m S(b)=0\quad\text{für}\quad r+1\le m\le 2r$$

(II) Hermite-Randbedingung zu $f\in\mathrm{C}^r[a,b]$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m S(a)=\left(\frac{d}{dt}\right)^m f(a)\quad\text{und}\quad\left(\frac{d}{dt}\right)^m S(b)=\left(\frac{d}{dt}\right)^m f(b)\ \text{ für }\ 1\le m\le r$$

(III) periodische Randbedingungen

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m S(a)=\left(\frac{d}{dt}\right)^m S(b)\quad\text{für}\quad 1\le m\le 2r$$

9 Splines

Zu $g,h \in \mathrm{C}^m[a,b]$ definiere

$$(g,h)_m = \int_a^b \Big(\frac{d}{dt}\Big)^m g(t) \Big(\frac{d}{dt}\Big)^m h(t)\,dt\,, \qquad |g|_m = \sqrt{(g,g)_m}\,.$$

(9.3) Zu $a \leq \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N \leq b$ und $f_0,\dots,f_N$ definiere $M = \big\{g \in \mathrm{C}^2[a,b]\colon\ g(\xi_n) = f_n\big\}$.
Dann existiert genau ein $S \in M$ mit $|S|_2 \leq |g|_2$ für alle $g \in M$.
Es gilt $S''(t) = 0$ für $t \in [a,\xi_0] \cup [\xi_N,b]$ und $S|_{[\xi_{n-1},\xi_n]} \in \mathbb{P}_3$.

(9.4) Sei $S \in \mathscr{S}_{2r+1}(\Xi)$ ein interpolierender Spline zu f und sei zusätzlich eine der Randbedingungen (I), (II) oder (III) erfüllt.
Sei $g \in \mathrm{C}^{r+1}[a,b]$ mit $g(\xi_n) = f(\xi_n)$ für $n = 0,\dots,N$, und zusätzlich gelte im Fall (II)

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^m g(a) = \Big(\frac{d}{dt}\Big)^m f(a) \quad \text{und} \quad \Big(\frac{d}{dt}\Big)^m g(b) = \Big(\frac{d}{dt}\Big)^m f(b) \ \ \text{für} \ \ 1 \leq m \leq r\,,$$

im Fall (III)

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^m g(a) = \Big(\frac{d}{dt}\Big)^m g(b) \quad \text{für} \quad 1 \leq m \leq r\,.$$

Dann gilt

$$(S-g,S)_{r+1} = 0 \quad \text{und} \quad |S|_{r+1} \leq |g|_{r+1}\,.$$

(9.5) Die Spline-Interpolation $S \in S_{2r+1}(\Xi)$ zu f mit einer der Randbedingungen (I), (II), (III) ist eindeutig lösbar.

9 Splines

(9.6) Die *Momente* $M_n = S''(\xi_n)$ von $S \in \mathscr{S}_3(\Xi)$ zu f sind eindeutig durch

$$\mu_n M_{n-1} + M_n + \lambda_n M_{n+1} = 3f[\xi_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}]$$

und $\mu_n = \dfrac{h_n}{2(h_n + h_{n+1})}$, $\quad \lambda_n = \dfrac{h_{n+1}}{2(h_n + h_{n+1})}$ mit $h_n = \xi_n - \xi_{n-1}$ bestimmt und es gilt

$$\begin{aligned} S_n(t) \quad &= \quad \frac{M_n(t-\xi_{n-1})^3 + M_{n-1}(\xi_n - t)^3}{6h_n} + \frac{f(\xi_n) + f(\xi_{n-1})}{2} - \frac{h_n^2}{12}(M_n + M_{n-1}) \\ &\quad + \Big(\frac{f(\xi_n) - f(\xi_{n-1})}{h_n} - \frac{h_n}{6}(M_n - M_{n-1})\Big)\Big(t - \frac{\xi_n + \xi_{n-1}}{2}\Big), \qquad t \in [\xi_{n-1}, \xi_n]\,. \end{aligned}$$

(9.7) Es gilt für $m = 0, \dots, r$ und $h = \max\limits_{i=n,\dots,N} h_i$, $h_n = \xi_n - \xi_{n-1}$

$$|S - f|_m \le 2^{-(r+1-m)/2} \frac{(r+1)}{m!} h^{r+1-m} |f|_{r+1}$$

(9.8) Es gilt für $f \in \mathrm{C}^2[a,b]$

$$\|S''\|_\infty \le 3\,\|f''\|_\infty.$$

(9.9) Es gilt für $f \in \mathrm{C}^4[a,b]$

$$\|S - f\|_\infty \le h^4 \,\Big\|\Big(\frac{d}{dt}\Big)^4 f\Big\|_\infty\,.$$

10 Numerische Integration – Newton-Cotes-Formeln

Karlsruhe Institute of Technology

(10.1) Eine Quadraturformel $I_\Xi \colon C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $I_\Xi(f) = \sum_{\xi\in\Xi} \omega_\xi f(\xi)$ zu Stützstellen $\Xi \subset [a,b]$ und Gewichten ω_ξ ist eine Linearform zur Approximation des Integrals $I(f) = \int_a^b f(t)dt$.
Sie heißt *exakt von der Ordnung p*, wenn der Fehler $I(P) = I_\Xi(P)$ für Polynome $P \in \mathbb{P}_p$.

(10.2) Sei $|\Xi| = N+1$. Wenn I_Ξ exakt von der Ordnung N ist, dann gilt

$$\omega_\xi = \int_a^b L_\xi(t)dt \text{ mit } L_\xi(t) = \prod_{\eta\in\Xi\setminus\{\xi\}} \frac{t-\eta}{\xi-\eta} \in \mathbb{P}_N.$$

(10.3) Die Quadraturformeln von der Ordnung N zu äquidistanten Stützstellen $\xi_n = a+nh$, $h = \frac{b-a}{N}$ heißen *Newton-Cotes-Quadraturformeln*. Es gilt:

$$\omega_n = \omega_{N-n} = \frac{b-a}{N}\,\frac{(-1)^{N-n}}{n!(N-n)!}\int_0^N \prod_{j=0,\ j\neq n}^{N} (t-j)dt.$$

(10.4) Die Newton-Cotes-Formeln sind für gerade N exakt von der Ordnung $N+1$.

(10.5) Seien $g,h \in C[a,b]$ mit $g(t) \geq 0$ für $t \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b g(t)h(t)dt = h(\tau)\int_a^b g(t)dt \text{ für eine Zwischenstelle } \tau \in (a,b).$$

(10.6) Sei $f \in C^4[a,b]$. Dann gilt für die Simpsonregel:

$$I_2(f) - I(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{90} f''''(\tau) \text{ für ein } \tau \in (a,b).$$

10 Numerische Integration – Gauß-Quadatur

(10.7) Die maximale Ordnung einer Quadratur mit N Stützstellen ist $2N-1$.

(10.8) Seien $\xi_1,\dots,\xi_N$ die Nullstellen des Orthogonalpolynoms Q_N in (a,b) bzgl. des Gewichts W.
Dann ist die zugehörige *Gauß-Quadratur* $G_N(f) = \sum_{n=1}^N \omega_n f(\xi_n)$ exakt für $P \in \mathbb{P}_{2N-1}$.
Die Gewichte der Gauß-Quadratur sind positiv.

(10.9) $$\int_a^b f(t)W(t)\,dt - G_N(f) = \frac{1}{(2N)!}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{2N} f(\tau)\,(R_N,R_N)_W \quad\text{mit}\quad R_N(t) = \prod_{n=1}^N (t-\xi_n).$$

Eine Folge $\{I_{\Xi^N}\}_{N\in\mathbb{N}}$ von Quadraturen mit Stützstellen $\Xi^N \subset [a,b]$ und Ge- wichten ω_ξ^N heißt *konvergent*, wenn $\lim\limits_{N\to\infty} |I(f) - I_{\Xi^N}(f)| = 0$ für alle $f \in C[a,b]$.

(10.10) Sei $\{I_{\Xi^N}\}$ für alle Polynome P konvergent (d.h. $\lim_{N\to\infty} I_{\Xi^N}(P) = I(P)$), und seien die Gewichte uniform beschränkt durch $\sum\limits_{\xi\in\Xi^N} |\omega_\xi^N| \le C$ für alle N.
Dann ist $\{I_{\Xi^N}\}$ konvergent für alle $f \in C[a,b]$.

(10.11) Wenn alle Gewichte positiv sind und I_{Ξ^N} von der Ordnung N exakt ist, ist $\{I_{\Xi^N}\}$ konvergent.

10 Numerische Integration

(10.12) Sei $I_h - I(f) = Ch^p + O(h^q)$ mit $q > p$. Dann gilt für die Extrapolation $\widehat{I}_h = I_h + \dfrac{1}{2^p - 1}\big(I_h - I_{2h}\big)$

a) $|I(f) - \widehat{I}_h| = O(h^q)$

b) $|I(f) - I_h| = \frac{1}{2^p-1}\big(I_h - I_{2h}\big) + O(h^q)$

(10.13) Sei $g \in C^{2m+2}[0,1]$. Es existieren Konstanten b_j und eine Zwischenstelle $\xi \in (0,1)$ mit

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1) + \sum_{j=1}^m b_j\Big(\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{2j-1} g(0) - \Big(\frac{d}{dt}\Big)^{2j-1} g(1)\Big) + b_{m+1}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{2m+2} g(\xi).$$

(10.14) Für $f \in C^{2m+2}[a,b]$ und $h = \dfrac{b-a}{n}$ gilt

$$T_h(f) - I(f) = \sum_{j=1}^m c_j h^{2j} + O(h^{2m+2}) \text{ mit } c_j = b_j\Big(\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{2j-1} f(a) - \Big(\frac{d}{dt}\Big)^{2j-1} f(b)\Big).$$

(10.15) Zu $T_{k0} = T_{h_k}(f)$ mit $h_k = 2^{-k}h$ für $k = 0,1,\dots,m$ definiere rekursiv

$$T_{ki} = T_{k,i-1} + \frac{1}{4^i - 1}\,(T_{k,i-1} - T_{k-1,i-1}), \qquad i = 1,\dots,m \text{ und } k = i,\dots,m.$$

Dann gilt: $|T_{mm} - I(f)| \le Ch^{2m+2}\Big\|\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)^{2m+2} f\Big\|_\infty$ mit $C > 0$ unabhängig von f.

(10.16) a) $|I - T_{kk}| = O(h^{2k+2})$

b) $|I - T_{k,k-1}| = |T_{kk} - T_{k,k-1}| + O(h^{2k+2})$.

10 Numerische Integration – Romberg-Quadratur

```
using namespace std;

#include <iostream>
#include <cmath>
#include <ext/numeric>
using __gnu_cxx::power;

const int K = 6;
const int N = power(2,K);

double Romberg (double F(double), double a, double b, double Eps) {
    double f[N+1];
    double h = (b-a) / N;
    for (int i=0; i<=N; i+=2) f[i] = F(a+i*h);
    return Romberg(F,a,b,f,Eps);
}

double F (double x) {
    return 4.0 / (x*x + 1);
}

int main () { cout << "Q = " << Romberg(F,0,1,1e-10) << endl; }
```

10 Numerische Integration – Romberg-Quadratur

```
double Romberg (double F(double), double a, double b,
                double* f, double Eps) {
    double T[K+1];
    double h = (b - a) * 0.5;
    T[0] = h * (f[0] + f[N]);
    for (int i=1, m=N; i<=K; ++i, m/=2, h /= 2) {
        double s = 0.0;
        if (i<K) for (int j=m/2; j<N; j+=m) s += f[j];
        else     for (int j=1;   j<N; j+=2) s += (f[j] = F(a+j*h));
        T[i] = 0.5 * T[i-1] + h * s;
        for (int j=1, q=4; j<=i; ++j, q *= 4) {
            double e = (T[i-j+1] - T[i-j]) / (q - 1);
            T[i-j] = T[i-j+1] + e;
            if (abs(e) < Eps) return T[i-j];
        }
    }
    double f2[2*N+1];
    for (int j=0; j<=N; ++j) f2[2*j] = f[j];
    Eps *= 0.5;
    return Romberg(F,a,(a+b)*0.5,f2,Eps)
           + Romberg(F,(a+b)*0.5,b,f2+N,Eps);
}
```

11 Trigonometrische Interpolation

(11.1) Die 2π-periodischen komplexen trigonometrischen Polynome $\mathbb{T}_n$ sind von der Form

$$T(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \exp(\mathrm{i}kt)\,.$$

(11.2) Die Funktionen $Q_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\mathrm{i}kt)$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathbb{T}_n$ bzgl.

$$(f,g)_0 = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

(11.3) Sei $f \in L_2(0,\pi)$. Dann ist $p_n(f)(t) = \sum_k (f,Q_k)_0 Q_k$ Orthogonalprojektion von f mit

$$\|f - p_n(f)\|_0 \le \|f - T\|_0\,, \qquad T \in \mathbb{T}_n\,.$$

(11.4) Sei $N \in \mathbb{N}$, $\omega = \omega_N = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}\right)$ die N-te Einheitswurzel und

$$F_N = \left(\omega_N^{nk}\right)_{n,k=0,\cdots,N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

die *Fouriermatrix*. Dann gilt $F^{-1} = \frac{1}{N}\overline{F}$, d.h $\sqrt{\frac{1}{N}}F$ ist unitär.

(11.7) Sei $\hat\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)\exp(-\mathrm{i}k\xi_j)$ mit $\xi_j = \frac{2\pi j}{N}$. Dann gilt $f(\xi_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat\alpha_k \exp(\mathrm{i}k\xi_j)$.

11 Trigonometrische Interpolation

(11.6) Sei $N = 2M \in \mathbb{N}$ gerade und $y = F_N x \in \mathbb{C}^N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y_{2k} &= \sum_{n=0}^{M-1} x_n^+ \omega_M^{kn} \quad \text{mit} \quad x_n^+ = x_n + x_{M+n}, \\ y_{2k+1} &= \sum_{n=0}^{M-1} x_n^- \omega_M^{kn} \quad \text{mit} \quad x_n^- = (x_n - x_{M+n})\omega_N^n. \end{aligned}$$

FFT-Algorithmus für die Berechnung von $y = F_N x$ für $N = 2^K$

S1) Wenn $N = 1$ und $y = x$: STOP

S2) Definiere

$$\begin{aligned} x^+ &= x\left[0 : \frac{N}{2} - 1\right] + x\left[\frac{N}{2} : N - 1\right] \in \mathbb{C}^{\frac{N}{2}} \\ x^- &= \operatorname{diag}(\omega_N^n)\left(x\left[0 : \frac{N}{2} - 1\right] - x\left[\frac{N}{2} : N - 1\right]\right) \in \mathbb{C}^{\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

S3) Berechne $y^+ = F_{\frac{N}{2}} x^+,\ y^- = F_{\frac{N}{2}} x^-$

S4) Setze $y = (y^+[0], y^-[0], y^+[1], y^-[1], \cdots) \in \mathbb{C}^N$. STOP

(11.7) Der FFT-Algorithmus benötigt $N\log(N)$ Operationen.

11 Trigonometrische Interpolation

Zu $s \geq 0$ definiere $\|f\|_s = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|^{2s})|\alpha_k|^2\right)^{1/2}$ mit $\alpha_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-\mathrm{i}kt)\,\mathrm{d}t$ und

$$H^s = \left\{u \in L_2(0,2\pi)\colon\ f \text{ periodisch fortsetzbar und } \|f\|_s < \infty\right\}.$$

(11.8) Es gilt

a) $H^s \subset C^0_{\text{per}}[0,2\pi]$ für $s > 1/2$.

b) $C^m_{\text{per}}[0,2\pi] \subset H^m$ für $m \in \mathbb{N}$.

Im Folgenden sei $f \in H^s$ für $s > 1/2$.

(11.9) Es gilt für $\hat\alpha_k = \frac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)\exp(\mathrm{i}k\xi_j)$ mit $\xi_j = \frac{2\pi j}{N}$ und $-N/2 < k \leq N/2$

$$\hat\alpha_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{k+jN}\,.$$

(11.10) Sei $n < N/2$ und $T_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \hat\alpha_k \exp(\mathrm{i}kt)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|f - T_n\|_0 \leq \frac{C}{n^s}\,\|f\|_s\,.$$