1 Einführung

Sei $\Omega \times [0,1] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ein Raum-Zeit-Zylinder. Wir betrachten eine Zustandsgröße $u\colon \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, eine Dichte $S(u(x,t))$, einen Fluss $J(x,t)$ und einen Quelle bzw. Senke $Q(x,t,u(x,t))$. Alle Größen seien hinreichend glatt.
In jedem Kontroll-Volumen $V \subset \Omega$ gilt die Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}\int_V S(u)\,dx = -\int_{\partial V} J\cdot\nu\,da + \int_V Q(u)\,dx\,.$$

Für den Fluss J können wir den Satz von Gauß einsetzen:

$$\int_{\partial V} J\cdot\nu\,da = \int_V \nabla\cdot J\,dx\,.$$

Damit ergibt sich die *Erhaltungsgleichung*

$$\partial_t S(u(x,t)) + \nabla\cdot J(x,t) - Q(x,t,u(x,t)) = 0\,.$$

Die Gleichung wird durch ein *konstitutives Gesetz* $J = C(u) - K(\nabla u)$ geschlossen:

$$\partial_t S(u(x,t)) + \nabla\cdot\big(C(u) - K(\nabla u)\big) - Q(x,t,u(x,t)) = 0\,.$$

Auf $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ gelten die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\big(C(u) - K(\nabla u)\big)\cdot\nu &= g_1 \text{ auf } \Gamma_1 \text{ (Neumann)}\\
\big(C(u) - K(\nabla u)\big)\cdot\nu + \alpha u &= g_2 \text{ auf } \Gamma_2 \text{ (Robin)}\\
u &= g_3 \text{ auf } \Gamma_3 \text{ (Dirichlet)}
\end{aligned}$$

1 Einführung

(1.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte Menge mit stückweisem glatten Rand.
Sei $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für } x \in \Omega, \qquad u(x) = g(x) \text{ für } x \in \partial\Omega$$

(klassische) Lösung des Poisson-Problems (mit Dirichlet-Randbedingungen).

(1.2) Sei $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geq 0$. Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) .$$

(1.3) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist ein Lipschitz-Gebiet, wenn gilt:

a) Ω ist offen in $\mathbb{R}^d$.
b) Ω ist zusammenhängend.
c) $\partial\Omega$ ist eine Lipschitz-Mannigfaltigkeit, d.h., für alle $y \in \partial\Omega$ existiert eine lokale Karte $\psi \in C^{0,1}(V, \partial\Omega)$ mit $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$ offen und $y \in \psi(V)$.

(1.4) In einem Lipschitz-Gebiet hat das Poisson-Problem mit Dirichlet-Randbedingungen eine eindeutige Lösung.