2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x \in \Omega$ und $h > 0$ genügend klein. Dann definiere

$$\partial_{h,i}^+ u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x+he^i) - u(x)\big)\,,$$

$$\partial_{h,i}^- u(x) = \frac{1}{h}\big(u(x) - u(x-he^i)\big)\,,$$

$$\partial_{h,i}^0 = \frac{1}{2}\big(\partial_{h,i}^+ + \partial_{h,i}^-\big)\,,\ \text{d.h. } \partial_{h,i}^0 u(x) = \frac{1}{2h}\big(u(x+he^i) - u(x-he^i)\big)\,,$$

$$\partial_{h,i}^2 = \partial_{h,i}^+\partial_{h,i}^-\,,\ \text{d.h. } \partial_{h,i}^2 u(x) = \frac{1}{h^2}\big(u(x+he^i) - 2u(x) + u(x-he^i)\big)\,,$$

$$\Delta_h u(x) = \sum_{i=1}^d \partial_{h,i}^2 u(x)\,.$$

Eine Finite-Differenzen-Diskretisierung von $Lu = -\nabla\cdot(K\nabla u + cu) + qu$ ist

$$L_h u(x) = \sum_{i=1}^d \Big(-\partial_{h/2,i}^+(K(x)\partial_{h/2,i}^+ u(x)) - K(x-\frac{h}{2}e^i)\partial_{h,i}^- u(x) + c(x)\partial_{h,i}^0 u(x)\Big) + (\nabla c + q)(x)u(x)\,.$$

(2.2) Sei $\Omega_h = a + h\mathbb{Z}^d$ ein Gitter mit $x \pm he^i \in \bar\Omega$ für alle $x \in \Omega_h$.
Sei $K \in C^3(\bar\Omega)$, $c \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^d)$, $q \in C(\bar\Omega)$. Dann gilt für $u \in C^4(\bar\Omega)$

$$\|L_h u - Lu\|_{\infty,\Omega_h} \le C\,h^2 \sum_{i=1}^d \big(\|\partial_i^4 u\|_{\infty,\Omega} + \|\partial_i^3 u\|_{\infty,\Omega}\big)\,.$$

2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.3) Eine Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{N,N}$ heißt

a) stark diagonal-dominant, wenn
$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |\underline{A}[n,k]| \leq |\underline{A}[n,n]| \qquad \text{für alle } n = 1,...,N,$$
und wenn ein $n_0 \in \{1,\dots,N\}$ mit $\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} |\underline{A}[n_0,k]| < |\underline{A}[n_0,n_0]|$ existiert;

b) irreduzibel, wenn zu jedem Paar $j \neq n$ eine Folge $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_R = n$ existiert so dass $\underline{A}[j_1, j_0] \neq 0, ..., \underline{A}[j_R, j_{R-1}] \neq 0$ gilt;

c) *M-Matrix*, wenn $\underline{A}[n,n] > 0$ für alle n, und $\underline{A}[n,k] \leq 0$ für $n \neq k$, wenn $\underline{A}$ regulär ist und $\underline{A}^{-1}[n,k] \geq 0$ für alle n,k gilt.

(2.4) Sei $\underline{A}$ eine irreduzible stark diagonaldominante Matrix mit $\underline{A}[n,n] > 0$ für alle n und $\underline{A}[n,k] \leq 0$ für $n \neq k$. Dann ist $\underline{A}$ eine M-Matrix.

Sei $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ mit $b_1 = a_1 + (N_1 + 1)h$, $b_2 = a_2 + (N_2 + 1)h$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$.
Sei $\Omega_h = (a + h\mathbb{Z}^2) \cap \Omega$, $\partial\Omega_h = (a + h\mathbb{Z}^2) \cap \partial\Omega$ und $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \partial\Omega_h$.
Sei $V_h = \{u_h \colon \bar{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}\}$, $V_h' = \{u_h \colon \Omega_h \longrightarrow \mathbb{R}\}$, und
$V_h(0) = \{u_h \in V_h \colon u_h(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega_h\}$.
Sei $I_h \colon C(\bar{\Omega}) \longrightarrow V_h$ die Gitterinterpolation. Eine Numerierung der Gitterpunkte definiert
$E_h \colon \mathbb{R}^N \longrightarrow V_h(0)$ und $E_h' \colon V_h' \longrightarrow \mathbb{R}^N$ und damit $\underline{A} = E_h' L_h E_h$.

(2.5) Sei $L\colon C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega}) \longrightarrow C(\Omega)$ ein Differentialoperator 2. Ordnung, und sei $L_h\colon V_h \longrightarrow V_h'$ ein Finite-Differenzen-Operator.
Dann heißt L_h

a) konsistent von der Ordnung p, wenn

$$\|I_h L u - L_h I_h u\|_{\infty,\Omega_h} \le C(u) h^p$$

für alle hinreichend glatten u.

b) konvergent von der Ordnung p, wenn

$$\|I_h u - u_h\|_{\infty,\Omega_h} \le C(u) h^p$$

für alle hinreichend glatten u und der diskreten Lösung u_h mit $L_h u_h(x) = Lu(x)$ für $x \in \Omega_h$ und $u_h(x) = u(x)$ für $x \in \partial\Omega_h$.

c) stabil, wenn eine Konstante $\hat{C} > 0$ (unabhängig von h) existiert mit

$$\|v_h\|_{\infty,\Omega_h} \le \hat{C}\,\|L_h v_h\|_{\infty,\Omega_h} \qquad \text{für alle } v_h \in V_h'.$$

(2.6) Sei L_h konsistent (von der Ordnung p) und stabil.
Dann ist L_h konvergent (von der Ordnung p).

(2.7) $L_h\colon V_h \longrightarrow V_h'$ heißt *invers monoton*, wenn gilt:

$$L_h v_h(x) \ge 0 \text{ für } x \in \Omega_h \text{ und } v_h(x) \ge 0 \text{ für } x \in \partial\Omega_h \quad \Rightarrow \quad v_h(x) \ge 0 \text{ für } x \in \Omega_h.$$

(2.8) Sei $w_h \in V_h$ mit $L_h w_h(x) \ge 1$ für $x \in \Omega_h$ und $w_h(x) \ge 0$ für $x \in \partial\Omega_h$.
Dann ist L_h stabil mit $\hat{C} = \|w_h\|_{\infty,\Omega_h}$.

2 Finite-Differenzen-Diskretisierungen

(2.9) Seien $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ und $C \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_4}$. Dann ist

$$B \otimes C = (B[n,k]C)_{n=1,\dots,N_1,\ k=1,\dots,N_2} \in \mathbb{R}^{N_1 N_3 \times N_2 N_4}$$

das *Kronecker-Produkt* von B und C.

(2.10) Seien $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$ und $C \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$ diagonalisierbar
mit Eigenwerten λ_n, μ_k und Eigenvektoren q^n, p^k von B bzw. C.
Dann sind $q^n \otimes p^k$ die Eigenvektoren zu $B \otimes C$ zu den Eigenwerten $\lambda_n \mu_k$.

(2.11) Sei $T_N = \mathrm{tridiag}(-1,2,-1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Dann gilt für $Q_N = \sqrt{\frac{2}{N}}\Big(\sin kn\theta\Big)_{n,k=1,\dots,N}$ und $D_N = \mathrm{diag}(\lambda_n)$ mit $\lambda_n = 2 - 2\cos(n\theta)$ und $\theta = \pi/(N+1)$

$$Q_N^T T_N Q_N = D_N\,.$$

Für die Matrixdarstellung des 5-Punkte Sterns $-\Delta_h$ gilt

$$A = T_N \otimes I_N + I_N \otimes T_N = (Q_N^T \otimes Q_N^T)(D_N \otimes I_N + I_N \otimes D_N)(Q_N \otimes Q_N)\,.$$

Daher löst sich das Gleichungssystem $Ax = b$ durch

$$\begin{aligned} Y &= Q_N^T (Q_N^T B^T)\,, \\ Z[k,n] &= Y[k,n]/(\lambda_k + \lambda_n) \qquad \text{für } n,k = 1,\dots,N\,, \\ X &= Q_N (Q_N Z^T)\,. \end{aligned}$$

Dabei werden $x, b \in \mathbb{R}^{N^2}$ durch zeilenweise Anordung als Matrizen $X, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dargestellt.