3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygongebiet, d.h. offen, zusammenhängend, und $\partial\Omega$ sei ein Polygonzug. Dann heißt $\mathcal{T}_h = \{K_1, \dots, K_M\}$ eine *zulässige Triangulierung* von Ω, wenn

a) $K_m = \mathrm{conv}\{z^{m,0}, z^{m,1}, z^{m,2}\} \subset \bar{\Omega}$ Dreieck mit $\mathrm{int}(\Omega) \neq \emptyset$ für $m = 1, \dots, M$,

b) $\bar{\Omega} = \bigcup_{m=1}^M K_m$

c) für $m \neq k$ ist $\mathrm{int}(K_m) \cap \mathrm{int}(K_k) = \emptyset$ und $K_m \cap K_k = \mathrm{conv}\left(\{z^{m,0}, z^{m,1}, z^{m,2}\} \cap \{z^{k,0}, z^{k,1}, z^{k,2}\}\right)$ leer oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante.

$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \mathrm{diam}(K)$ ist die *Gitterweite* und $\mathcal{V}_h = \bigcup_{m=1}^M \{z^{m,0}, z^{m,1}, z^{m,2}\}$.

(3.2) $\mathcal{S}_h^1 = \{v \in C(\bar{\Omega})\colon v|_K \in \mathbb{P}_1 \text{ für alle } K \in \mathcal{T}_h\}$ ist der Raum der linearen Finiten Elemente.

(3.3) $v \in \mathcal{S}_h^1$ ist eindeutig durch die Werte $v(z)$ an den Knotenpunkten $z \in \mathcal{V}_h$ bestimmt. $\phi_z \in \mathcal{S}_h^1$ mit $\phi_z(z) = 1$ und $\phi_z(y) = 0$ für $y \in \mathcal{V}_h \setminus \{z\}$ ist die Knotenbasis.

(3.5) $w_i \in L_2(\Omega)$ heißt schwache Ableitung von $v \in L_2(\Omega)$ (nach x_i), wenn für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega w_i \psi \, dx = -\int_\Omega v \partial_i \psi \, dx \,.$$

(3.8) $H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega)\colon \partial_i v \in L_2(\Omega)\}$ ist ein Hilbert-Raum mit

$$(v,w)_1 = (v,w)_0 + (\nabla v, \nabla w)_0 \,, \qquad \|v\|_1 = \sqrt{(v,v)_1} \,.$$

Es gilt $\mathcal{S}_h^1 \subset H^1(\Omega)$.

(3.9) Sei $h_K = 2\min\{r>0\colon K\subset B(r,x),\ x\in K\}$ und $\rho_K = 2\max\{r>0\colon B(r,x)\subset K,\ x\in K\}$.
Eine Familie von Triangulierungen $(\mathscr{T}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ heißt

a) *regulär*, wenn $C>0$ existiert mit $h_K/\rho_K \le C$,

b) *uniform*, wenn $c>0$ existiert mit $ch \le \rho_K \le h_K \le h = \max_{K\in\mathscr{T}_h} h_K$.

(3.10) Sei $\hat K = \operatorname{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ das Referenzdreieck, und sei $\varphi_K\colon \hat K \longrightarrow K$ die linear affine Transformation $\varphi_K(\hat x) = (1-\hat x_1-\hat x_2)z^0 + \hat x_1 z^1 + \hat x_2 z^2$. Dann gilt für $F_K = \varphi_K'$ und $J_K = \det F_K$

$$|F_K| \le Ch_K\,, \qquad |J_K| \le Ch_K^2\,, \qquad |F_K^{-1}| \le C\rho_K^{-1}\,, \qquad |J_K^{-1}| \le C\rho_K^{-2}\,.$$

(3.11) Sei $d=2$. Für $v\in C(K)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt

$$ch_K^{-1}\|\hat v\|_{0,\hat K} \le \|v\|_{0,K} \le Ch_K\|\hat v\|_{0,\hat K}\,.$$

Für $v\in C^1(K)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt $(\nabla u)\circ\varphi_K = F_K^{-T}\hat\nabla\hat v$ und

$$c\rho_K h_K^{-1}\|\hat\nabla\hat v\|_{0,\hat K} \le \|\nabla v\|_{0,K} \le Ch_K\rho_K^{-1}\|\hat\nabla\hat v\|_{0,\hat K}\,.$$

Für $v\in C^2(K)$ und $\hat v = v\circ\varphi_K$ gilt $(\nabla^2 u)\circ\varphi_K = F_K^{-T}\hat\nabla^2\hat v F_K^{-1}$.

$$c\rho_K h_K^{-2}\|\hat\nabla^2\hat v\|_{0,\hat K} \le \|\nabla^2 v\|_{0,K} \le C\rho_K^2 h_K^{-1}\|\hat\nabla^2\hat v\|_{0,\hat K}\,.$$

(3.12) $H^m(\Omega) = \{v\in H^{m-1}(\Omega)\colon \partial_i v\in H^{m-1}(\Omega)\}$ mit $(v,w)_m = (v,w)_0 + \sum_{i=1}^d (\partial_i v,\partial_i w)_{m-1}$.

$C^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H^m(\Omega)$. Wenn Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, dann ist $C^m(\bar\Omega)$ dicht in $H^m(\Omega)$.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.13) Sei Ω konvex. Für $v \in H^1(\Omega)$ definiere

$$Qv(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \big(v(y) + \nabla v(y)(x-y)\big)\,dy\,.$$

Dann gilt für $Rv = v - Qv$ und $x \in \Omega$

$$Rv(x) = \int_\Omega k(x,z)(x-z)\nabla^2 v(z)(x-z)\,dz \qquad \text{mit } |k(x,z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{h_\Omega^2}{\rho_\Omega^2}|x-z|^{-2}\,.$$

(3.14) Es existiert $C > 0$ unabhängig von h_Ω, ρ_Ω, so dass für alle $v \in H^2(\Omega)$ gilt:

a) $\|v - Qv\|_2 \le C\,\|\nabla^2 v\|_0$

b) $\|v\|_\infty \le C\,\|v\|_2$

Für $d \le 3$ gilt $C(\bar\Omega) \subset H^2(\Omega)$.

(3.15) Sei $\operatorname{span}\{\phi_{z^0},\phi_{z^1},\phi_{z^2}\} = \mathbb{P}_1$ und $Iv = v(z^0)\phi_{z^0} + v(z^1)\phi_{z^1} + v(z^2)\phi_{z^2}$. Dann gilt

$$\|v - Iv\|_2 \le C\,\|\nabla^2 v\|_0 \qquad \text{für } v \in H^2(\Omega)\,.$$

(3.16) Sei $\mathscr{T}_h$ eine uniforme Triangulierung. Dann gilt für $I_h v = \sum_{z\in\mathscr{V}_h} v(z)\phi_z \in \mathscr{S}_h^1$

a) $\|v - I_h v\|_1 \le C\,h\,\|v\|_2$ für alle $v \in H^2(\Omega)$,

b) $\|v - I_h v\|_0 \le C\,h^2\,\|v\|_2$ für alle $v \in H^2(\Omega)$.

(3.16) Sei $(\mathscr{T}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ eine Familie von uniformen Triangulierungen mit $h \longrightarrow 0$. Dann ist $\bigcup_{h\in\mathscr{H}} S_h^1$ dicht in $H^1(\Omega)$.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.17) Zu $\Gamma_3 \subset \partial\Omega$ definiere $V_h = \{v_h \in \mathscr{S}_h^1 \colon v_h(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_3\}$.
Sei $(\mathscr{T}_h)_{h\in\mathscr{H}}$ eine Familie von uniformen Triangulierungen, so dass $(\mathscr{S}_h^1)_{h\in\mathscr{H}}$ dicht in $H^1(\Omega)$ ist. Dann sei $V \subset H^1(\Omega)$ der kleinste Hilbertraum, der alle V_h ($h \in \mathscr{H}$) enthält.
Die Spurabbilung $\gamma_3 \colon H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\Gamma_3)$ ist wohldefiniert und stetig. Es gilt

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \colon \gamma_3(v) = 0\}.$$

(3.18) Sei $\mathrm{meas}_{d-1}(\Gamma_3) > 0$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|v\|_0 \le C\Big(\|\nabla v\|_0 + \|v\|_{0,\Gamma_3}\Big) \qquad \text{für alle } v \in H^1(\Omega) \qquad \text{(Poincaré-Friedrichs-Ungleichung)}.$$

(3.19) Sei $K \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$, $c \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $q, f \in C(\Omega)$, $g_i \in C(\Gamma_i)$ mit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, und $\alpha \in C(\Gamma_2)$. Sei $Lu = -\nabla\cdot(K\nabla u) + c\cdot\nabla u + qu$.
Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ K\nabla u\cdot\nu &= g_1 && \text{auf } \Gamma_1, \\ K\nabla u\cdot\nu + \alpha u &= g_2 && \text{auf } \Gamma_2, \\ u &= g_3 && \text{auf } \Gamma_3. \end{aligned}$$

Dann gilt $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ mit

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \Big(K\nabla u\cdot\nabla u + c\cdot\nabla u v + quv\Big)\,dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u v\,da, \\ \ell(v) &= \int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_1} g_1 v\,da + \int_{\Gamma_2} g_2 v\,da. \end{aligned}$$

(3.20) Sei $K \in L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$, $c \in L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $q \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $g_1 \in L_2(\Gamma_1)$, $g_2 \in L_2(\Gamma_2)$, $\alpha \in L_\infty(\Gamma_2)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_3(u) = g_3$ und

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

schwache Lösung der Randwertaufgabe (3.19), und $u_h \in \mathscr{S}_h^1$ mit $\gamma_3(u_h) = I_h g_3$ und

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

heißt *Galerkin-Approximation* von u.

(3.21) Die Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $\ell : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

(3.22) Es gelte

a) K ist positiv definit, d.h. $z^T K(x) z \ge k_0 |z|^2$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $x \in \Omega$,
b) $\nabla \cdot c \in L_\infty(\Omega)$ und $q - \frac{1}{2}\nabla \cdot c \ge 0$ in Ω,
c) $\nu \cdot c \ge 0$ auf Γ_1,
d) $\alpha + \frac{1}{2}\nu \cdot c \ge 0$ auf Γ_2,
e) eine der Bedingungen gelte:
   i) $\mathrm{meas}_{d-1}(\Gamma_3) > 0$,
   ii) es existiert $\Omega' \subset \Omega$ mit $\mathrm{meas}_d(\Omega') > 0$ und $r_0 > 0$ mit $q - \frac{1}{2}\nabla c \ge r_0$ in Ω',
   iii) es existiert $\Gamma' \subset \Gamma_1$ mit $\mathrm{meas}_{d-1}(\Gamma') > 0$ und $c_0 > 0$ mit $c \cdot \nu \ge c_0$ auf Γ',
   iv) es existiert $\Gamma' \subset \Gamma_2$ mit $\mathrm{meas}_{d-1}(\Gamma') > 0$ und $c_0 > 0$ mit $\alpha + \frac{1}{2} c \cdot \nu \ge c_0$ auf Γ'.

Dann ist $a(\cdot,\cdot)$ V-elliptisch, d.h. es existiert $\alpha_0 > 0$ mit $a(v,v) \ge \alpha_0 \|v\|_1^2$ für alle $v \in V$.

3 Die Finite-Elemente-Methode

(3.23) Sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch, und sei $u_D \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_3(u_D) = g_3$. Dann existiert $u_h \in V_h$ mit

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) - a(u_D, v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

und die Lösung ist eindeutig.

(3.24) Sei $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und elliptisch. Definiere

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v + u_D, v + u_D) - \ell(v) \quad \text{für } v \in V\,.$$

Dann gilt:

a) $F(u_h) \le F(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$.

b) $(V_h)_h$ sei dicht in V mit $h \longrightarrow 0$.
Dann ist die Folge der Lösungen $u_h \in V_h$ eine Minimalfolge on $F(\cdot)$:

$$\inf_h F(u_h) = \inf_{v \in V} F(v) > -\infty\,.$$

c) Es existiert $u \in V$ mit $F(u) \le F(v)$ für alle $v \in V$. Es gilt $u_h \longrightarrow u$.

d) $u \in V$ ist eindeutig durch

$$a(u, v) = \ell(v) - a(u_D, v) \quad \text{für alle } v \in V$$

charakterisiert.

(3.25) Sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in V$ der Variationsgleichung

$$a(u, v) = \ell(v) - a(u_D, v) \quad \text{für alle } v \in V\,.$$

3 Die Finite-Elemente-Methode

Sei $u \in V$ die Lösung aus (3.25) und $u_h \in V_h$ die Galerkin-Approximation (3.23).
Dann gilt $a(u - u_h, v_h) = 0$ für alle $v_h \in V_h$ (*Galerkin-Orthogonalität*).

(3.26) Sei $a(\cdot,\cdot)$ beschränkt und elliptisch in V. Dann gilt

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C_a}{\alpha_0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 .$$

(3.27) Für die Lösung $u \in V$ aus (3.25) gelte $u \in H^2(\Omega)$. Dann gilt die Fehler-Abschätzung

$$\|u - u_h\|_1 \leq C\, h \|u\|_2 .$$

Die Konstante $C > 0$ ist unabhängig von h und hängt nur von der Gitterregularität ab.

(3.28) Sei $f \in L_2(\Omega)$ und $u \in V$ Lösung des Problems $a(u,v) = (f,v)_0$ für alle $v \in V$.
Dann heißt das Problem (bzw. Ω) *H^2-regulär*, wenn für alle $f \in L_2(\Omega)$ die Lösung $u \in H^2(\Omega)$ erfüllt, und wenn $C > 0$ existiert mit

$$\|u\|_2 \leq C \|f\|_0 .$$

Wenn Ω konvex ist, dann ist das Laplace-Problem H^2-regulär.
Wenn $\partial\Omega$ und die Koeffizienten von L glatt sind, dann ist das Variationsproblem H^2-regulär.

(3.29) Für die Lösung $u \in V$ aus (3.25) gelte $u \in H^2(\Omega)$. Zusätzlich sei das adjungierte Problem H^2-regulär, d.h. für alle $f \in L_2(\Omega)$ und der Lösung $w \in V$ Lösung des adjungierten Problems

$$a(v,w) = (f,v)_0 \qquad \text{für alle } v \in V$$

sei $w \in H^2(\Omega)$ mit $\|w\|_2 \leq C \|f\|_0$. Dann gilt die Fehler-Abschätzung

$$\|u - u_h\|_0 \leq C\, h^2 \|u\|_2 .$$