4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ ein Lipschitz-Gebiet.

(4.1) Eine *Triangulierung* $\mathscr{T}_h$ von Ω ist eine Zerlegung in Zellen (Elemente) $K \subset \bar{\Omega}$ mit

a) K abgeschlossen
b) $\mathrm{meas}_d(K) > 0$
c) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathscr{T}_h} K$
d) $\mathrm{int}(K) \cap \mathrm{int}(K') = \emptyset$ für $K, K' \in \mathscr{T}_h$ und $K \neq K'$.

(4.2) a) Für eine Finite-Elemente-Triangulierung sei zusätzlich jedem $K \in \mathscr{T}_h$ zugeordnet:
   i) eine Referenzzelle $\hat{K}$ (Dreieck, Viereck, Tetraeder, Pyramide, Prisma, Quader)
   ii) eine invertierbare, orientierungserhaltene Abbildung $\varphi_K \colon \hat{K} \longrightarrow K$.

b) Die Triangulierung heißt *affin*, wenn alle φ_K linear affin sind.

c) Die Triangulierung heißt *zulässig*, wenn der Durchschnitt $K \cap K'$ leer, eine Ecke, eine Kante, oder eine Seite von K bzw. K' ist.

(4.3) a) Ein *Finites (Referenz-)Element* ist ein Tripel $(\hat{K}, \hat{V}, \hat{\Sigma})$ mit
   i) $\hat{K}$ Referenzzelle
   ii) $\hat{V} = \mathrm{span}\{\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_M\}$ Ansatzraum mit Basisfunktionen $\hat{\phi}_m \colon C(\hat{K}) \longrightarrow \mathbb{R}^s$ (hier: $s = 1$)
   i) $\hat{\Sigma} = \{\hat{\phi}'_1, \dots, \hat{\phi}'_M\} \subset \hat{V}'$ Freiheitsgrade mit $\hat{\phi}'_m(\phi_m) = 1$ und $\hat{\phi}'_m(\phi_n) = 0$ für $n \neq m$.

Durch die Abbildung $\varphi_K \colon \hat{K} \longrightarrow K$ wird das Finite Element (K, V_K, Σ_K) definiert.

b) Der zugehörige Finite-Elemente-Raum ist

$$X_h = \{v \in X \colon v|_K \in V_K \text{ für alle } K \in \mathscr{T}_h\}.$$

Dabei ist $X \subset L_2(\Omega)$ ein Banachraum.

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

(4.4) a) Sei $X = C(\bar\Omega)$. Ein Finites Element $(\hat K, \hat V, \hat\Sigma)$ heißt *Lagrange-Element*, wenn die Freiheitsgrade $\hat\Sigma$ nur aus Punkt-Auswertungen $\hat\phi'_m(v) = v(y^m)$ besteht. Dann gilt $V_K = \{v \in X \colon v \circ \varphi_K \in \hat V\}$ und $\phi'_m(v) = v(y^m)$ mit $y^m = \varphi_K(\hat y^m)$. $I_K v = \sum v(y^m)\phi_m$ heißt Lagrange-Interpolation.

b) Finite Elemente heißen äquivalent, wenn sie ein gemeinsames Finites Referenz-Element besitzen. Sie heißen affin-äquivalent, wenn φ_K linear affin ist.

Sei $|v|_m = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_0^2\Big)^{1/2}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_d$ und $\partial^\alpha v = \partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_d} v$.

(4.5) Bramble-Hilbert-Lemma: Sei $I_K(p) = p$ für $p \in \mathbb{P}_k$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|I_K v - v\|_{k+1} \le C\,|I_K v - v|_{k+1} \qquad \text{für alle } v \in H^{k+1}(\Omega)\,.$$

(4.6) Die Einbettung $H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ ist kompakt.

(4.7) Transformationsformel: Für $|\alpha| = m$, $v \in H^m(\Omega)$ und $\hat v = v \circ \varphi_K$ gilt

$$\min_{\hat x \in \hat K} |F_K(\hat x)^{-1}|^m J_K(\hat x)^{1/2} \|\partial^\alpha v\|_{0,K} \le \|\hat\partial^\alpha \hat v\|_{0,\hat K} \le \max_{\hat x \in \hat K} |F_K(\hat x)|^m J_K(\hat x)^{-1/2} \|\partial^\alpha v\|_{0,K}\,.$$

(4.8) Eine Familie $(\mathscr{T}_h)_h$ von Triangulierungen heißt

a) regulär, wenn $\min|F_K(\hat x)^{-1}|\max|F_K(\hat x)| \le C$ unabhängig von $K \in \mathscr{T}_h$ und h.

b) uniform, wenn $C \ge c > 0$ existiert mit $ch \le (\min|F_K(\hat x)^{-1}|)^{-1} \le \max|F_K(\hat x)| \le Ch$.

(4.9) Sei $I_{\hat K}(p) = p$ für $p \in \mathbb{P}_k$. Dann gilt für uniforme Triangulierungen und $m = 0, \dots, k$

$$\|I_K v - v\|_m \le C\,h^{k+1-m} |v|_{k+1} \qquad \text{für alle } v \in H^{k+1}(\Omega)\,.$$

(4.10) Sei $u \in V$ die Lösung aus (3.25) und $u_h \in V_h$ die Galerkin-Approximation (3.23). Es gelte (4.9) und $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Dann gilt die Fehler-Abschätzung $\|u - u_h\|_1 \le C\,h^k\,|u|_{k+1}$.

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

(4.11) Ein Finites Element heißt *isoparametrisches Element*, wenn $\varphi_K \in \hat{V}^d$ gilt.
(4.12) Für ein isoparametrisches Lagrange-Element gilt $\varphi_K(\hat{x}) = \sum_j \hat{\phi}_j(\hat{x}) y^j$.

(4.13) Sei $\hat{Q}(\hat{v}) = \sum\limits_{\xi \in \Xi} \omega_\xi \, \hat{v}(\xi)$ eine Kubaturformel mit Punkten $\Xi \subset \hat{K}$ und Gewichten ω_ξ.

$$\hat{E}(\hat{v}) = \int \hat{v}(\hat{x}) \, d\hat{x} - \hat{Q}(\hat{v}), \qquad \hat{v} \in C(\hat{K})$$

ist der Kubaturfehler. Die Genauigkeit der Kubatur ist das größte k mit $\hat{E}(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}_k$.

$$a_h(v,w) = \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \sum_{\xi \in \Xi} \omega_\xi J_K(\xi) K(\varphi_K(\xi)) F_K(\xi)^{-T} \hat{\nabla}(v \circ \varphi_K)(\xi) \cdot F_K(\xi)^{-T} \hat{\nabla}(w \circ \varphi_K)(\xi)$$

(4.14) 1. Lemma von Strang: Sei $u \in V$ mit $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$, und sei $u_h \in V_h$ mit $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$. Wenn $a(u,v) \le C_1 \|u\|_1 \|v\|_1$ und $a_h(v_h, v_h) \ge \alpha_0 \|v_h\|_1^2$ für alle $h \in (0, h_0)$ gilt, dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_1 \le C \inf_{v_h \in V_h} \Big(\|u - v_h\|_1 + \sup_{\|w_h\|_1 = 1} |a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)| + \sup_{\|\tilde{w}_h\|_1 = 1} |\ell(\tilde{w}_h) - \ell_h(\tilde{w}_h)| \Big).$$

(4.15) Sei $\hat{E}(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}_{2k-2}$. Dann gilt für affine Elemente K, $p, q \in \mathbb{P}_{k-1}$ und $a \in C^k(K)$

$$E_K(apq) \le C\, h^k \, \|a\|_{k,\infty,K} \|p\|_{k-1} \|q\|_0 \qquad \text{mit } E_K(v) = J_K \, \hat{E}(v \circ \phi_K).$$

(4.16) Sei (4.14) und (4.15) erfüllt, und sei zusätzlich $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Dann gilt $\|u - u_h\|_1 \le C\, h^k \, |u|_{k+1}$.
(4.17) Wenn zusätzlich das duale Problem H^2-regulär ist und $|a(v,w) - a_h(v,w)| \le Ch^k \|v\|_2 \|w\|_2$ und $|\ell(v) - \ell_h(v)| \le Ch^2 \|v\|_2$ erfüllt ist, gilt $\|u - u_h\|_0 \le C\, h^{k+1} \, |u|_{k+1}$.

4 Praktische Aspekte der Finite-Elemente-Methode

Karlsruhe Institute of Technology

(4.18) Sei $X_h = \mathrm{span}\{\phi_j\}$ ein Lagrange-Finite-Elemente-Raum und $\pi_h \colon L_1(\Omega) \longrightarrow X_h$ mit

$$\Pi_h v = \sum_{j=1}^{N} P_j v\, \phi_j\,, \qquad P_j v = \frac{1}{\mathrm{meas}_d(\omega_j)} \int_{\omega_j} v\, dx\,, \qquad \omega_j = \mathrm{supp}\, \phi_j$$

die Clément-Interpolation. Sei $\omega_K = \bigcup_{\omega_j \supset K} \omega_j$. Dann gilt für $v \in H^1(\Omega)$:

a) $\|v - \Pi_h v\|_{0,K} \le C h_K \, \|\nabla v\|_{0,\omega_K}$

b) $\|v - \Pi_h v\|_{0,F} \le C h_K^{1/2} \, \|\nabla v\|_{0,\omega_K}$ für jede Seitenfläche $F \subset \partial K$.

(4.19) Ein Fehlerschätzer $\eta = \left(\sum \eta_K^2\right)^{1/2}$ heißt

a) *zuverlässig*, wenn $C > 0$ exisitiert mit $\|u - u_h\|_1 \le C\eta$

b) *effizient*, wenn $c > 0$ existiert mit $\|u - u_h\|_{1,\omega_K} \ge c\,\eta_K$ für eine Umgebung $\omega_K \supset K$

b) *asymptotisch exakt*, wenn $\|u - u_h\|_1 / \eta \longrightarrow 1$ gilt.

(4.20) Sei $Lu = -\Delta u + qu$. Dann gilt für die schwache Lösung $u \in V$ von $Lu = f$ und $u_h \in V_h$

$$a(u - u_h, v) \le C\Big(\sum_{K \in \mathscr{T}_h} h_K \|r_K(u_h)\|_{0,k} + \sum_{F \in \mathscr{F}_h} h_F^{1/2} \|\, [\nu \cdot \nabla u_h]_F \,\|_{0,F} \Big) \, \|v\|_1$$

mit $r_K(u_h) = (Lu_h - f)|_K$ und $[\nu \cdot w]_F(x) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \nu \cdot \big(w(x + t\nu) - w(x - t\nu)\big)$.

(4.21) Der residuale Fehlerschätzer ist zuverlässig:

$$\eta = \left(\sum \eta_K^2\right)^{1/2} \quad \text{mit} \quad \eta_K = h_K \|r_K(u_h)\|_{0,k} + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathscr{F}_K} h_F^{1/2} \|\, [\nu \cdot \nabla u_h]_F \,\|_{0,F}\,.$$