# 5 FE-Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen

**(5.1)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet, und seien $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $g \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^d)$ gegeben.
Wenn $(u,p) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d) \times C^1(\Omega)$ die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \text{ in } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

erfüllt, dann heißt $(u,p)$ klassische Lösung der Stokes-Gleichungen.

**(5.2)** Sei $X = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und definiere $V = \{v \in X \colon \nabla \cdot v \equiv 0\}$.
Sei $(u,p)$ eine klassische Lösung von (5.1) mit $g \equiv 0$. Dann gilt

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \text{für alle } v \in V$$

mit $a(v,w) = \int_\Omega \nabla v : \nabla w \, dx$ und $\ell(v) = \int_\Omega f \cdot v \, dx$. Definiere $b(v,q) = \int_\Omega \nabla \cdot v q \, dx$.
Zu jedem $f \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in V$.

**(5.3)** Seien $X_h \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $Q_h \subset L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ Finite-Elemente-Räume. Definiere
$V_h = \{v_h \in X_h \colon b(v_h, q_h) = 0 \text{ für alle } q_h \in Q_h\}$. Dann existiert genau ein $u_h \in V_h$ mit

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \qquad \text{für alle } v_h \in V_h\,.$$

Zudem ist $u_h \in V_h$ Minimierer von $F(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - \ell(v_h)$ in $V_h$.

**(5.4)** Wenn $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$ ein Sattelpunkt von dem Lagrangefunktional
$L(v_h, q_h) = F(v_h) + b(v_h, q_h)$ ist, d.h.

$$L(u_h, q_h) \le L(u_h, p_h) \le L(v_h, p_h) \qquad \text{für alle } (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h\,,$$

dann gilt $u_h \in V_h$ und $u_h$ löst (5.3).

# 5 FE-Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen

(5.5) 2. Lemma von Strang: Sei $a_h(v,w) = a(v,w)$ für $v,w \in V$ und sei $\|\cdot\|_h$ eine Norm auf $V + V_h$. Sei $u \in V$ mit $a(u,v) = \ell(v)$ für alle $v \in V$, und sei $u_h \in V_h$ mit $a_h(u_h,v_h) = \ell_h(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$. Wenn $|a_h(v,w)| \le C_a \|v\|_h \|w\|_h$ für $v,w \in V + V_h$ und $a_h(v_h,v_h) \ge \alpha_0 \|v_h\|_h^2$ für $v_h \in V_h$ gilt, dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_h \le C \inf_{v_h \in V_h} \Big( \|u - v_h\|_h + \sup_{\|w_h\|_h = 1} |a_h(u,w_h) - \ell_h(w_h)| \Big)\,.$$

(5.6) Das Sattelpunktproblem (5.4) hat eine eindeutige Lösung $(u_h,p_h)$, wenn gilt:

$$\inf_{q_h \in Q_h,\ \|q_h\|_0 = 1} \ \sup_{v_h \in X_h,\ \|v_h\|_1 = 1} b(v_h,q_h) > 0\,.$$

(5.7) $(X_h,Q_h)$ heißt *inf-sup stabil*, wenn für alle $q_h \in Q_h$ gilt:

$$\sup_{v_h \in X_h,\ \|v_h\|_1 = 1} b(v_h,q_h) \ge \beta_0 \sup_{v \in X,\ \|v\|_1 = 1} b(v,q_h)\,.$$

(5.8) Das Fortin-Kriterium: Sei $F_h \colon X \longrightarrow X_h$ ein linearer Operator mit $\|F_h v\|_1 \le C\,\|v\|_1$ und $b(v,q_h) = b(F_h v, q_h)$ für alle $v \in X$ und alle $q_h \in Q_h$. Dann ist $(X_h,Q_h)$ inf-sup stabil.

Sei $X_h = \big(H_0^1(\Omega) \cap S_h^1\big)^2 + \mathrm{span}\{b_K = \lambda_0\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}^2) \colon K \in \mathscr{T}_h\}$ und $Q_h = \mathscr{S}_h^1/\mathbb{R}$ (Mini-Element).

(5.9) Es gilt die inverse Abschätzung $\|v_h\|_1 \le C\,h^{-1}\,\|v_h\|_0$ für $v_h \in X_h$.

(5.10) Sei $\Omega$ konvex. Dann ist das Mini-Element $(X_h,Q_h)$ inf-sup stabil.

# 5 FE-Diskretisierungen der Stokes-Gleichungen

Karlsruhe Institute of Technology

(5.11) Zu $X = H^1_0(\Omega,\mathbb{R}^d)$, $Q = L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ und $V = \{v \in X\colon b(v,q) = 0 \text{ für alle } q \in Q\}$.
Definiere $E\colon Q \longrightarrow X$ mit $a(Eq,v) = b(v,q)$ für alle $v \in X$. Dann gilt

a) $E(Q)$ ist dicht in $V^\perp = \{v \in X\colon a(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in X\}$.

b) Wenn $\beta > 0$ existiert mit $\sup_{\|v\|_1=1} b(v,q) \geq \beta\|q\|_0$ für alle $q \in Q$, dann gilt $E(Q) = V^\perp$.

(5.12) Zu $q \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ mit $\int_\Omega q\,dx = 0$ existiert ein $v \in H^1_0(\Omega,\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla\cdot v = q$, und es existiert ein $C > 0$ mit $\|v\|_1 \leq C\|q\|_0$.

(5.13) Es existiert ein $\beta > 0$ mit $\sup_{\|v\|_1=1} b(v,q) \geq \beta\|q\|_0$ für alle $q \in Q$.

(5.14) Zu $f \in L_2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ existiert $(u,p) \in X\times Q$ mit

$$\begin{aligned} a(u,v)+b(v,p) &= (f,v)_0, && v \in X,\\ b(u,q) &= 0, && q \in Q. \end{aligned}$$

(5.15) Sei $T_h\colon X\times Q \longrightarrow X_h\times Q_h$ der Lösungsoperator $(v_h,q_h) = T_h(v,q)$ mit

$$\begin{aligned} a(v_h,w_h)+b(w_h,q_h) &= a(v,w)+b(w,q), && w_h \in X_h,\\ b(v_h,r_h) &= b(v,r_h), && r_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Wenn $(X_h,Q_h)$ inf-sup stabil ist, dann ist $\|T_h\|_{L(X\times Q,X\times Q)} = \sup\limits_{\|(v,q)\|_{X\times Q}=1} \|T_h(v,q)\|_{X\times Q} \leq C$.

(5.15) Wenn $(X_h,Q_h)$ inf-sup stabil ist, dann gilt

$$\|(u,p)-(u_h,p_h)\|_{X\times Q} \leq C \inf_{(v_h,q_h)\in X_h\times Q_h} \|(u,p)-(v_h,q_h)\|_{X\times Q}.$$