Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik III — Programmier-Übungsblatt 1

Sommersemester 2010

Betrachten Sie auf $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad\qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,,$$

mit $-\Delta u(x) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x)$.

Zu $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ und den Schrittweiten $h_1 = \frac{b-a}{N_1-1}$, $h_2 = \frac{d-c}{N_2-1}$ seien die Gitterpunkte $x_{i,k} = (a + (i-1)\,h_1, c + (k-1)\,h_2)$ für $i = 1, \ldots, N_1$ und $k = 1, \ldots, N_2$ gegeben. Am Gitterpunkt $x_{i,k}$ soll die Funktion u durch den Wert $u_{i,k}$ approximiert werden und an den inneren Gitterpunkten $x_{i,k}$, $i = 2, \ldots, N_1 - 1$ und $k = 2, \ldots, N_2 - 1$ sollen die numerischen Approximationen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_{i,k}) \approx \frac{1}{h_1^2}\Big(u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}\Big)\,,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_{i,k}) \approx \frac{1}{h_2^2}\Big(u_{i,k-1} - 2u_{i,k} + u_{i,k+1}\Big)\,,$$

für die Ableitungen benutzt werden.

Mit $N = N_1 N_2$ und anhand der Abbildung $\mathcal{N} : \{1, \ldots, N_1\} \times \{1, \ldots, N_2\} \to \{1, \ldots, N\}$, $\mathcal{N}(i,k) = (k-1)N_1 + i$ lassen sich die Approximationen $u_{i,k} \approx u(x_{i,k})$ dann als ein Vektor $U \in \mathbb{R}^N$ mittels $u_{i,k} = U_{\mathcal{N}(i,k)}$ darstellen. Dies entspricht der sogenannten lexikographischen Ordnung in $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) < (z_1, z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{entweder} \quad x_2 < z_2 \quad \text{oder} \quad x_2 = z_2\,, x_1 < z_1\,.$$

Aufgabe 1 (mündlich)

(a) Auf $\Omega = (0,1)^2$ erfüllt die Funktion $u(x) = \sin(\pi x_1)(x_2^2 - 1)x_2$ die Randbedingungen $u(x) = 0$ auf $\partial\Omega$. Bestimmen Sie $f : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $-\Delta u(x) = f(x)$ gilt.

(b) Für die N Unbekannten $u_{i,k} = U_{\mathcal{N}(i,k)}$ ergeben sich (mit den obigen Approximationen für die Ableitungen) N Gleichungen. Formulieren Sie diese als ein lineares Gleichungssystem für den Vektor U.

Aufgabe 2 (Abgabe)

(a) Implementieren Sie eine Matlab-Funktion

```
[A,f] = fd_assemble(a,b,c,d,N1,N2),
```

die als Argumente die Parameter des Gebiets und die Anzahl der Punkte in x_1- und x_2-Richtung erhält. Diese soll die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ und die rechte Seite $f \in \mathbb{R}^N$ des Gleichungssystems aus Aufgabe 1(b) zurückgeben.

(b) Nutzen Sie die LR-Zerlegung von Matlab, und berechnen Sie die Lösung $U \in \mathbb{R}^N$ des Gleichungssystems $AU = f$.

(c) Schreiben Sie eine Funktion

```
fd_plot(a,b,c,d,N1,N2,U),
```

welche die in (b) berechnete Approximation auf dem Gitter zeichnet.

(d) Testen Sie die Konvergenz des Verfahren in Abhängigkeit von $h = \max\{h_1, h_2\}$ anhand des Beispiels aus Aufgabe 1(a). Berechnen Sie dazu für verschiedene Werte von h die diskrete Fehlerfunktion $e_{i,k} = u_{i,k} - u(x_{i,k})$ und den Fehler

$$\|e\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,N_1, k=1,\ldots,N_2} |e_{i,k}|\,.$$

Welche Konvergenzordnung bzgl. h beobachten Sie?

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich bis einschließlich **Donnerstag, den 29.04.2010** im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Dieses findet immer **donnerstags, ab 15.45 Uhr** statt. Soweit über die Mailingliste nichts anderes bekannt gegeben wird, ist zuerst der Seminarraum SR1 Treffpunkt.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa32010s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Rechnerpraktikum müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.