Numerische Mathematik III — Programmier-Übungsblatt 2

Sommersemester 2010

Aufgabe 3 **(Abgabe bis zum 6. Mai)**

Betrachten Sie nochmals die Problemstellung von Übungsblatt 1 auf $\Omega = (0,1)^2$ und einem uniformen Gitter, d.h. $N_1 = N_2$ und $h = h_1 = h_2$. Erweitern Sie für diese Situation das Programm aus Aufgabe 2 und implementieren Sie anstelle des 5-Punkte Differenzensterns

$$-\Delta_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}, \qquad R_h = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

aus Aufgabe 2, den 9-Punkte Differenzenstern

$$-\Delta_h = \frac{1}{6h^2}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R_h = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} & 1/2 & \\ 1/2 & 4 & 1/2 \\ & 1/2 & \end{bmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie dazu eine Funktion `[A,f] = fd_assemble9pt`, die mit den 9-Punkte Sternen die diskrete Gleichung $-\Delta_h u_h = R_h f_h$ auf einem uniformen Gitter implementiert.

(b) Testen Sie anhand des Beispiels aus Aufgabe 1 die Konvergenz des Verfahrens und bestimmen Sie die Konvergenzordnung.

Aufgabe 4 (mündlich)

Betrachten Sie mittels `spy(A)` die Besetztheitsstruktur der bisher erzeugten Finite-Differenzen-Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N,N}$. Untersuchen Sie auch die Besetztheitsstruktur der durch die LR-Zerlegungen von Matlab (Befehl `lu`) erzeugten Faktoren $L, R \in \mathbb{R}^{N,N}$. Machen Sie sich anschließend mit dem `sparse` Matrix-Format von Matlab vertraut. Dies ist ein spezielles Format zum Speichern dünnbesetzter Matrizen und vermeidet das Abspeichern überflüssiger Null-Einträge. Überlegen Sie sich insbesondere wie Sie die Finite-Differenzen-Matrizen geeignet erzeugen können.

Aufgabe 5 **(Abgabe bis zum 13. Mai)**

Betrachten Sie auf $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot \big(K(x)\nabla u(x)\big) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $K : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion sei. Zu $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ und den Schrittweiten $h_1 = \frac{b_1 - a_1}{N_1 - 1}$, $h_2 = \frac{b_2 - a_2}{N_2 - 1}$ seien wieder die Gitterpunkte $x_{i,k} = (a_1 + (i-1)\,h_1, a_2 + (k-1)\,h_2)$ für $i = 1, \dots, N_1$ und $k = 1, \dots, N_2$ gegeben. Am Gitterpunkt $x_{i,k}$ soll der Funktionswert $u(x_{i,k})$ wieder durch $u_{i,k}$ approximiert werden. An einem Gitterpunkt $x_{i,k}$ sei zudem

$$K^O_{i,k} = K(x_{i,k} + \frac{h_1}{2}e^1), \quad \text{(Osten)}, \qquad K^W_{i,k} = K(x_{i,k} - \frac{h_1}{2}e^1), \quad \text{(Westen)},$$
$$K^N_{i,k} = K(x_{i,k} + \frac{h_2}{2}e^2), \quad \text{(Norden)}, \qquad K^S_{i,k} = K(x_{i,k} - \frac{h_2}{2}e^2), \quad \text{(Süden)},$$

definiert. An den inneren Gitterpunkten soll der Differentialoperator $-\nabla \cdot \big(K(x)\nabla u(x)\big)$ dann durch den Differenzenstern

$$\begin{bmatrix} & -\frac{1}{h_2^2}K^N_{i,k} & \\ -\frac{1}{h_1^2}K^W_{i,k} & \left(\frac{1}{h_2^2}K^N_{i,k} + \frac{1}{h_1^2}K^O_{i,k} + \frac{1}{h_2^2}K^S_{i,k} + \frac{1}{h_1^2}K^W_{i,k}\right) & -\frac{1}{h_1^2}K^O_{i,k} \\ & -\frac{1}{h_2^2}K^S_{i,k} & \end{bmatrix}$$

approximiert werden.

Schreiben Sie in Analogie zu Aufgabe 2 eine Funktion

`[A,f] = fd_assemble_coeff(a1,b1,a2,b2,N1,N2)`,

welche die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ und die rechte Seite $f \in \mathbb{R}^N$ des zum Differenzenstern gehörigen Gleichungssystems aufstellt. Benutzen Sie dabei das `sparse`-Format von Matlab zum Speichern der Matrix A (siehe auch Aufgabe 4).

bitte wenden

Aufgabe 6 **(Abgabe bis zum 13. Mai)**

Auf dem Gebiet $\Omega = (-1,1)^2$ sei die Funktion $K : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Konstanten $k_1 = 161.4476387975881$ und $k_2 = 1$ durch

$$K(x_1,x_2) = \begin{cases} k_1 & , x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,,\\ k_2 & , x_1 < 0\,, x_2 > 0\,,\\ k_1 & , x_1 \leq 0\,, x_2 \leq 0\,,\\ k_2 & , x_1 > 0\,, x_2 < 0\,,\end{cases}$$

definiert. Zudem sei in Polarkoordinaten die Funktion $h : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$h(r,\phi) = \begin{cases} r^\alpha \cos\big((\frac{\pi}{2} - \beta)\alpha\big)\cos(\phi\alpha) & , \phi \in [0, \frac{\pi}{2}),\\ r^\alpha \cos(\frac{\pi}{2}\alpha)\cos\big((\phi - \pi + \beta)\alpha\big) & , \phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi),\\ r^\alpha \cos(\beta\alpha)\cos\big((\phi - \frac{3\pi}{2})\alpha\big) & , \phi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}),\\ r^\alpha \cos\big((\phi - \frac{3\pi}{2} - \beta)\alpha\big) & , \phi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi),\end{cases}$$

gegeben, wobei $\alpha = \frac{1}{10}$ und $\beta = -14.92256510455152$. Die Funktion $g(x) = h(r(x), \phi(x))$ löst auf Ω das Randwertproblem

$$-\nabla \cdot \big(K(x)\nabla u(x)\big) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad\qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,.$$

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die die Funktion $g(x)$ auswertet. Sie können dabei die Matlab-Funktion `cart2pol` zum Umrechnen von kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten benutzen (beachten Sie allerdings den Definitionsbereich von `cart2pol`). Visualisieren Sie anschließend die exakte Lösung.

(b) Benutzen Sie die Diskretisierung aus Aufgabe 5 um eine Finite-Differenzen-Approximation zu erhalten.

(c) Visualisieren Sie sowohl die Approximation als auch den Fehler zur exakten Lösung. An welchen Stellen beobachten Sie den größten Fehler?

(d) Welche Konvergenz beobachten Sie bzgl. der Gitterweite h?

Bemerkung: Zu gegebenem k_1, k_2 berechnen sich α, β aus Sturm-Liouville Eigenwertaufgaben.

Organisatorisches:

Am Donnerstag, 6. Mai wird die Vorlesung und der erste Teil des Rechnerpraktikums getauscht, d.h. um 9.45 Uhr findet der theoretische Teil des Praktikums statt, und von 15.45–17.15 Uhr findet die Vorlesung statt. Anschließend beginnt der praktische Teil des Rechnerpraktikums im Pool-Raum.

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Dieses findet immer **donnerstags, ab 15.45 Uhr** statt. Soweit über die Mailingliste nichts anderes bekannt gegeben wird, ist zuerst der Seminarraum SR1 Treffpunkt.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa32010s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Rechnerpraktikum müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.