Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik III — Programmier-Übungsblatt 4

Sommersemester 2010

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygongebiet und betrachten Sie auf Ω das Poisson-Problem

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Im Folgenden sei $u_D : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Fortsetzung von g ins Innere von Ω. $\mathcal{T}_h = \{K_1, \ldots, K_M\}$ sei eine zulässige Triangulierung von Ω in Dreiecke und $\mathcal{V}_h$ sei die Menge der Knotenpunkte. Der (lineare) Finite-Element-Raum sei wieder durch

$$\mathcal{S}_h \equiv \mathcal{S}_h^1 = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_1 \quad \text{für alle} \quad K \in \mathcal{T}_h\} = \operatorname{span}\{\phi_z : z \in \mathcal{V}_h\}\,,$$

gegeben, wobei ϕ_z die nodale Basisfunktion zum Knotenpunkt $z \in \mathcal{V}_h$ sei. Zudem sei

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{S}_h : v_h(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega\}\,,$$

und jedes $v_h \in V_h$ lässt sich dann durch $v_h = \sum_{z \in \mathcal{V}_h \setminus \partial\Omega} \underline{v}_z \phi_z$ darstellen. Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und die Linearform $\ell(\cdot)$ seien definiert durch

$$a(u_h, v_h) = \int_\Omega \nabla u_h(x) \cdot \nabla v_h(x)\, dx\,, \qquad \ell(v_h) = \int_\Omega f(x)\, v_h(x)\, dx\,,$$

und damit lässt sich die schwache Formulierung des Poisson-Problems angeben: Bestimme $u_h \in V_h$ sodass

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h) - a(u_D, v_h) \qquad \text{für alle} \quad v_h \in V_h\,.$$

Der Ansatz $u_h = \sum\limits_{z \in \mathcal{V}_h \setminus \partial\Omega} \underline{u}_z \phi_z$ führt auf ein lineares Gleichungssystem $\underline{A}\,\underline{u} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A} = \big(a(\phi_z, \phi_y)\big)_{z,y}\,, \qquad \underline{b} = \big(\ell(\phi_z) - a(u_D, \phi_z)\big)_z\,, \qquad \text{für} \quad z, y \in \mathcal{V}_h \setminus \partial\Omega\,.$$

Die Matrix $\underline{A}$ und der Vektor $\underline{b}$ lassen sich anhand der Transformationen $\varphi_m : \widehat{K} \to K_m$, $\varphi_m(\widehat{x}) = F_m \widehat{x} + d_m$ und $J_m(\widehat{x}) = \det D\varphi_m(\widehat{x}) = \det F_m$ wieder elementweise darstellen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}\underline{A}_{z,y} &= \int_\Omega \nabla\phi_z(x) \cdot \nabla\phi_y(x)\, dx = \sum_{m=1}^{M} \int_{K_m} \nabla\phi_z(x) \cdot \nabla\phi_y(x)\, dx \\ &= \sum_{m=1}^{M} \int_{\widehat{K}} \big(F_m^{-T} \widehat{\nabla}(\phi_z \circ \varphi_m)(\widehat{x})\big) \cdot \big(F_m^{-T} \widehat{\nabla}(\phi_y \circ \varphi_m)(\widehat{x})\big) |J_m(\widehat{x})|\, d\widehat{x}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (Abgabe: 17. Juni)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function [A,b] = fe_assemble(vertices,edges,triangles,f_hdl,g_hdl),
```

die die Matrix $\underline{A}$ und den Vektor $\underline{b}$ des linearen Gleichungssystems $\underline{A}\,\underline{u} = \underline{b}$ assembliert und zurückgibt. Neben dem Gitter sollen dabei die "Function handles" `f_hdl` (für die Auswertung der rechten Seite $f(x)$) und `g_hdl` (für das Setzen der Randwerte $g(x)$) übergeben werden.

Für die Berechnung der Integrale soll wieder eine Quadraturformel benutzt werden und die Matrix $\underline{A}$ soll im `sparse`-Matrix-Format von Matlab gespeichert werden.

Aufgabe 11 (Abgabe: 17. Juni)

Betrachten Sie auf $\Omega = (0,1)^2$ nochmals das Problem aus Aufgabe 1 (Übungsblatt 1), d.h. $g(x) = 0$ und $f(x) = \sin(\pi x_1)\big(\pi^2(x_2^2 - 1)x_2 - 6x_2\big)$. Die Lösung des Problems ist $u(x) = \sin(\pi x_1)(x_2^2 - 1)x_2$.

(a) Nutzen Sie die Funktion `fe_assemble` aus Aufgabe 10 um das lineare Gleichungssystem $\underline{A}\,\underline{u} = \underline{b}$ aufzustellen und anschließend zu lösen.

(b) Sei u_h die in (a) berechnete Lösung des Poisson-Problems. Benutzen Sie die Funktion `fe_fehler` aus Aufgabe 9 (Übungsblatt 3) um die Konvergenz der Finite-Element-Methode zu untersuchen. Betrachten Sie dazu die Fehler $\|u - u_h\|_0$ bzw. $\|u - u_h\|_1$. Welche Konvergenzordnung erwarten bzw. beobachten Sie?

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Dieses findet immer **donnerstags, ab 15.45 Uhr** statt. Soweit über die Mailingliste nichts anderes bekannt gegeben wird, ist zuerst der Seminarraum SR1 Treffpunkt.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa32010s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Rechnerpraktikum müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.