Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners, Dipl.-Math. techn. Martin Sauter

Numerische Mathematik III — Programmier-Übungsblatt 5

Sommersemester 2010

Erweitern Sie für die folgenden Aufgaben die Programme von Aufgabenblatt 4, um die Probleme mithilfe der Finite-Element-Methode näherungsweise zu lösen. Benutzen Sie zur Fehlerberechnung jeweils die Funktion `fe_fehler` von Aufgabenblatt 3.

Aufgabe 12 **(Abgabe: 24. Juni)**

Betrachten Sie auf $\Omega = (-1,1)^2$ erneut das Interface-Problem

$$-\nabla \cdot \big(K(x)\nabla u(x)\big) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,,$$

mit stückweise konstantem $K(x)$ gegeben durch

$$K(x_1,x_2) = \begin{cases} k_1 & , x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\,, \\ k_2 & , x_1 < 0\,, x_2 > 0\,, \\ k_1 & , x_1 \leq 0\,, x_2 \leq 0\,, \\ k_2 & , x_1 > 0\,, x_2 < 0\,, \end{cases}$$

mit $k_1 = 161.4476387975881$ und $k_2 = 1$. In Polarkoordinaten, d.h. $r(x) = |x|$ und $\phi(x) = \arctan\frac{x_2}{x_1}$, sind die Randwerte dann gegeben durch $g(x) = h(r(x),\phi(x))$,

$$h(r,\phi) = \begin{cases} r^\alpha \cos\big((\frac{\pi}{2}-\beta)\alpha\big)\cos(\phi\alpha) & , \phi \in [0,\frac{\pi}{2}), \\ r^\alpha \cos(\frac{\pi}{2}\alpha)\cos\big((\phi-\pi+\beta)\alpha\big) & , \phi \in [\frac{\pi}{2},\pi), \\ r^\alpha \cos(\beta\alpha)\cos\big((\phi-\frac{3\pi}{2})\alpha\big) & , \phi \in [\pi,\frac{3\pi}{2}), \\ r^\alpha \cos\big((\phi-\frac{3\pi}{2}-\beta)\alpha\big) & , \phi \in [\frac{3\pi}{2},2\pi), \end{cases}$$

mit $\alpha = 1/10$ und $\beta = -14.92256510455152$. Die Funktion g löst das Interface-Problem in Ω. Welche Konvergenz-Ordnung beobachten Sie?

Aufgabe 13 **(Abgabe: 24. Juni)**

Sei $\Omega = (-1,1)^2$. Betrachten Sie zu dem reellen Parameter $\varepsilon > 0$ und $w = (0,1)^T$ die Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$-\varepsilon\Delta u(x) + w\cdot\nabla u(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,,$$

mit den Randbedingungen

$$g(x) = x_1\frac{1-\exp((x_2-1)/\varepsilon)}{1-\exp(-2/\varepsilon)}\,.$$

Die Funktion g ist auch Lösung des Randwertproblems in Ω. Beobachten Sie das Konvergenz-Verhalten der Finite-Element-Methode in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$. Was beobachten Sie für im Grenzfall $\varepsilon \to 0$?

Aufgabe 14 **(Abgabe: 24. Juni)**

Betrachten Sie auf dem L-Gebiet $\Omega = (-1,1)^2 \setminus [0,1)\times(-1,0]$ die Laplace-Gleichung

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u(x) = g(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,,$$

mit $g(x) = h(r(x),\phi(x))$, $h(r,\phi) = r^{2/3}\sin(\frac{2}{3}\phi)$ und erneut löst g das Gleichung auch in Ω. Welche Konvergenzordnung können Sie beobachten?

Für die Gittergenerierung können Sie sich auf der Homepage die Funktion `fe_lshape.m` herunterladen.

Attestierung:

Die mit **(Abgabe)** markierten Aufgaben können Sie sich im Rechnerpraktikum attestieren lassen. Dieses findet immer **donnerstags, ab 15.45 Uhr** statt. Soweit über die Mailingliste nichts anderes bekannt gegeben wird, ist zuerst der Seminarraum SR1 Treffpunkt.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa32010s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Rechnerpraktikum:

Zur aktiven Teilnahme am Rechnerpraktikum müssen Sie sich registrieren. Den entsprechenden Link finden Sie auf der Homepage.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.