

Numerische Mathematik III

Programmier-Übungsblatt 6

Sommersemester 2010

Betrachten Sie auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ das Stokes-Problem (mit Viskosität $\nu > 0$)

$$-\nu \Delta u(x) + \nabla p(x) = 0, \quad \operatorname{div} u(x) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dabei ist $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ das Geschwindigkeitsfeld und $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Druck. Mit den Bilinearformen

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nu \nabla u(x) : \nabla v(x) dx, \quad b(u, p) = - \int_{\Omega} p(x) \operatorname{div} u(x) dx$$

lautet die schwache Formulierung: Bestimme $u \in V = H_0^1(\Omega)^d$ und $p \in M = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, sodass

$$a(u + u_D, v) + b(v, p) = 0 \quad \forall v \in V, \quad b(u + u_D, q) = 0 \quad \forall q \in M.$$

Dabei sei $u_D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Fortsetzung von g ins Innere von Ω .

Das Stokes-Problem ist bereits in M++ implementiert. Maßgeblich sind dabei folgende Dateien (Pfadangaben sind relativ zum M++ Verzeichnis):

- `Stokes/conf/cfdmodel.conf`: Konfigurationsdatei (Textdatei). Hier werden Problem-Parameter (z.B. welches Gitter, Grad der Gitterverfeinerung, welches Problem aus `StokesConfiguration`, usw.) und andere Programm-Parameter (z.B. Gleichungssystem-Löser, Diskretisierung, usw.) gesetzt.
- `Stokes/src/StokesAssemble.h`: Assemblierung der Matrix und der rechten Seite, sowie Setzen der entsprechenden Randwerte.
- `Stokes/src/Stokes.h`: Implementierung verschiedener Modelle (neben Stokes auch Navier-Stokes).
- `Stokes/src/StokesConfiguration.C`: Kapselt die Problem-Daten, wie z.B. Randwerte.
- `Stokes/src/CFD.C`: Hier erfolgt der eigentliche Start des Programms.

Das Programm ist bereits auf dem Rechner `ma-otto11` installiert. Zugriff per SSH erhalten Sie über (die Account-Vergabe erfolgt im Praktikum)

`ssh -X PraktikumXX@ma-otto11.mathematik.uni-karlsruhe.de`

Im M++ Verzeichnis können Sie via `make Stokes` neu kompilieren. Das Programm können Sie anschließend mit M++ starten. Voreingestellt ist das "Driven Cavity"-Problem. Dabei ist $\Omega = (-1, 1)$ und die Randwerte sind gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} [0, 0]^T & , \text{ falls } x_2 < 1, \\ [1 - x_1^4, 0]^T & , \text{ falls } x_2 = 1. \end{cases}$$

Anschließend können Sie über den Aufruf von `mayavi stokes_vis.mv` die Visualisierung starten.

Aufgabe 15

(mündlich)

Experimentieren Sie etwas mit den Problem-Parametern für das "Driven Cavity"-Problem.

Aufgabe 16

(Abgabe: 8. Juli)

Erweitern Sie die Datei `StokesConfiguration.C` um eine Klasse `CollidingFlow`, die auf $\Omega = (-1, 1)$ das Problem mit den Randwerten

$$g(x) = \begin{bmatrix} 20x_1x_2^3 \\ 5x_1^4 - 5x_2^4 \end{bmatrix}$$

löst. $u = g$ ist auch Lösung des Stokes-Problems in Ω und der zugehörige Druck ist gegeben durch $p(x) = 60x_1^2x_2 - 20x_2^3 + \text{Konstante}$. Binden Sie das Problem anschließend in `cfdmodel.conf` ein und visualisieren Sie die Lösung.

Literatur: Elman/Silvester/Wathen: *Finite Elements and Fast Iterative Solvers*. Oxford Science Publications.

Studienbegleitende Prüfungen:

Mögliche Termine für eine studienbegleitende Prüfungen sind: **27. Juli** ab 11 Uhr, **9. August** ab 11 Uhr und **14. September** ab 10 Uhr.

Service/Material:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa32010s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.