

## Numerische Mathematik III

Sommersemester 2010

## Programmier-Übungsblatt 7

Betrachten Sie auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  das Stokes-Problem (mit Viskosität  $\nu > 0$ )

$$-\nu \Delta u(x) + \nabla p(x) = 0, \quad \operatorname{div} u(x) = 0,$$

und das stationäre (nichtlineare) Navier-Stokes-Problem

$$-\nu \Delta u(x) + (u(x) \cdot \nabla)u(x) + \nabla p(x) = 0, \quad \operatorname{div} u(x) = 0.$$

Der Rand von  $\Omega$  sei die disjunkte Vereinigung  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . Auf  $\Gamma_D$  gelte  $u_D(x) = g(x)$  und auf  $\Gamma_N$  gelte  $\nu \nabla u(x)n - p(x)n = 0$  (natürliche Ausströmbedingung) mit der äußeren Normalen  $n$ .

### Aufgabe 17 (Poiseuille-Strömung) (mündlich)

Zeigen Sie, dass  $u(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$  und  $p(x) = -2\nu x_1$  auf  $\Omega = (-1, 1)^2$  sowohl Lösungen der Stokes-Gleichungen wie auch der Navier-Stokes-Gleichungen sind.

### Aufgabe 18 (Strömung über eine Treppenstufe) (Abgabe: 15. Juli)

Sei  $\Omega = (-1, 5) \times (-1, 1) \setminus (-1, 0] \times (-1, 0]$  und es sei  $\Gamma_N = \{5\} \times (-1, 1)$ . Zudem sei der Dirichlet-Rand  $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$  disjunkt zerlegt via  $\Gamma_D = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_0$ . Dabei ist  $\Gamma_{\text{in}} = \{-1\} \times (0, 1)$  der Einström-Rand (Inflow) und auf diesem gelte ein Poiseuille-Strömungs-Profil, d.h.  $u(x) = c[\frac{1}{4} - (x_2 - \frac{1}{2})^2, 0]^T$  mit  $c > 0$ . Auf  $\Gamma_0$  gelte  $u(x) = 0$  (No-slip condition).

Das zugehörige Gitter ist `Mesh_StepFlow.geo`.

- Implementieren Sie eine neue Problem-Klasse `StepFlow` in `StokesConfiguration.C`, in der die Dirichlet-Randbedingungen gesetzt werden.
- Lösen Sie die Stokes- und die Navier-Stokes-Gleichungen für dieses Problem.
- Visualisieren Sie die Strömung (Stromlinien), indem Sie eine Visualisierung in `mayavi` erstellen.
- Wie verändert sich die Strömung qualitativ in Abhängigkeit vom Viskositäts-Parameter  $\nu$ ?

### Aufgabe 19 (Driven Cavity – Navier-Stokes) (mündlich)

Betrachten Sie nochmals das Driven-Cavity-Problem von Übungsblatt 6. Wie verändern sich die Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen in Abhängigkeit von der Viskosität  $\nu$  (auch im Vergleich zur Stokes-Lösung)?

Sowohl das Stokes- als auch das Navier-Stokes-Problem sind bereits in M++ implementiert. Relevante Dateien (Pfadangaben sind relativ zum M++ Verzeichnis):

```
Stokes/conf/cfdmodel.conf
Stokes/src/StokesAssemble.h
Stokes/src/Stokes.h
Stokes/src/StokesConfiguration.C
Stokes/src/CFD.C
```

Weitere Hinweise:

- Einloggen: `ssh -X PraktikumXX@ma-otto11.mathematik.uni-karlsruhe.de`
- Text-Editoren: Z.B. `gedit` oder `emacs`
- Kompilieren: `make Stokes` (im M++ Verzeichnis)
- Programm-Start: M++
- Visualisierung: `mayavi` bzw. `mayavi stokes_vis.mv`
- Anhängen von `&` an einen Befehl startet diesen im Hintergrund (und ermöglicht die weitere Benutzung der Konsole)

Literatur: Elman/Silvester/Wathen: Finite Elements and Fast Iterative Solvers. Oxford Science Publications.

### Studienbegleitende Prüfungen:

Mögliche Termine für eine studienbegleitende Prüfungen sind: **27. Juli** ab 11 Uhr, **17. August** ab 11 Uhr, **14. September** ab 10 Uhr und **20. Oktober** ab 14 Uhr.

### Service/Material:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numa32010s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort werden neben den aktuellen Praktikumsblättern in unregelmäßigen Abständen auch Übersichtsfolien und Beispielprogramme zur Vorlesung bereitgestellt.

### Sprechstunden:

Prof. Dr. Christian Wieners: Mittwoch, 10.00-12.00 Uhr.  
Dipl.-Math. techn. Martin Sauter: Donnerstag, 10.00-11.30 Uhr.