

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

11. Übungsblatt

Aufgabe 1: (4+1 Punkte)

Wir wollen die zweite Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x approximieren. Dazu werten wir für gegebenes $h > 0$ die Funktion an den Stellen $t_0 = x - h$, $t_1 = x$, $t_2 = x + h$ aus, bestimmen das Interpolationspolynom p zweiten Grades durch diese Punkte und werten hierfür $S = p''(x)$ aus.

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt

$$S = \alpha f(x - h) + \beta f(x) + \gamma f(x + h)$$

mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese Konstanten in Abhängigkeit von h .

- b) (2 Punkte) Wir nehmen an, dass $f \in C^4(\mathbb{R})$ mit beschränkten vierten Ableitungen: $\|f^{(4)}\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| \leq K$. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung um x die Fehlerabschätzung $|S - f''(x)| \leq C \|f^{(4)}\|_\infty h^2$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
- c) (1 Zusatzpunkt) Warum reicht die Auswertung von f an den drei Punkten t_0, t_1, t_2 nicht aus, um eine Approximation der dritten Ableitung $f^{(3)}(x)$ zu liefern?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es sei $I = [0, 2]$, $\Delta = \{t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2\}$ und

$$S := \{s \in C^2(I) : s|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathcal{P}^3, i = 1, 2, s''(0) = s''(2) = 0\}$$

(kubische Splines mit sogenannten natürlichen Randbedingungen).

- a) (2 Punkte) Welche der folgenden Funktionen liegen in S und warum?

- (i) $f(x) = x^2(x - 6) - (x - 2)^2$,
- (ii) $f(x) = \max\{0, x - 1\}^3 - x^3/2$,
- (iii) $f(x) = x^3 - x^2$.
- (iv) $f(x) = (x - 1)^4 - 6(x - 1)^2$.

- b) (2 Punkte) Man bestimme den interpolierenden Spline $s \in S$ für $f(x) = x^3$.

Abgabe: Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **10.7.2009, 9.45 Uhr** in den Einwurfschlitzen „Numerik für Informatiker“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. **Beachten Sie, dass zu spät oder falsch abgegebene Blätter mindestens eine Punktreduktion um die Hälfte erhalten.**