Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte
und Numerische Mathematik

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

13. Übungsblatt

Aufgabe 1: (0+4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Mittelpunktsregel

$$M_h(f) = \sum_{i=1}^{n} hf(a + (i - \frac{1}{2})h)\,, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

zur Approximation des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

für $f \in C^2([a,b])$ die Fehlerabschätzung

$$|I(f) - M_h(f)| \le (b-a)\frac{\|f''\|_\infty}{16}h^2\,, \quad \|f''\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f''(\xi)|$$

erfüllt.
Hinweis: Taylor-Entwicklung um den Mittelpunkt jeden Teilintervalls.

Aufgabe 2: (0+4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, dass $\int_0^1 f(x)\,dx$ mit der Mittelpunktregel $M_h(f)$ für gegebenes $h = \frac{1}{n}$ approximiert. (Sie könnnen dazu das Programm des letzten Übungsblatts verwenden). Schreiben Sie dann eine Extrapolationsfunktion, welche für die Punktepaare

$$(t_i := h_i^2, y_i := M_{h_i}(f))\,, h_i := \frac{1}{2^i}, i = 0, 1, \ldots, n$$

eine Polynominterpolation durchführt. (Sie können dazu das Programm aus der Vorlesung geeignet modifizieren.) Der Wert des entstehenden Polynoms an der Stelle 0 ist dann die gewünschte „extrapolierte“ Approximation des Integrals. Stellen Sie eine Tabelle auf, die im Fall $f(x) = \exp(x)$ und $n = 0, \ldots, 5$ den Fehler in Abhängigkeit von n darstellt.
Bemerkung: Man extrapoliert in der Variable $t = h^2$, weil man zeigen kann, dass der Fehler $e(h) = \int_0^1 f(x)\,dx - M_h(f)$ eine Funktion in der Variable h^2 ist.

—
Abgabe: Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **22.7.2009**, **9.45 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. **Beachten Sie, dass zu spät oder falsch abgegebene Blätter mindestens eine Punktreduktion um die Hälfte erhalten.**