Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte
und Numerische Mathematik

# Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

5. Übungsblatt

**Aufgabe 1:** (2 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $\|\cdot\|$ bezeichne sowohl eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ als auch die zugehörige Operatornorm. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\|A^{-1}\| = \left(\min_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|\right)^{-1}, \quad \kappa(A) = \frac{\max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|}\,.$$

**Aufgabe 2:** (2 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass die Spektralnorm gegeben ist als

$$\|A\|_2 = \rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}\,.$$

Hierbei ist $\sigma(A)$ das Spektrum der Matrix $A$ und $\rho(A)$ der Spektralradius.

**Aufgabe 3:** (2 Punkte)
Wir definieren: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch positiv definit*, wenn $A = A^t$ und für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t Ax > 0$. Folgern Sie hieraus, dass für eine symmetrisch positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alle Diagonalelemente und alle Eigenwerte positiv sind.

**Aufgabe 4:** (2 Punkte)
Finden Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}$ eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für welche

- nur $O(n)$ Matrixeinträge von Null verschieden sind,
- die LR-Zerlegung existiert,
- sowohl $L$ als auch $R$ vollbesetzt sind (d.h. beide haben jeweils $\frac{n(n+1)}{2}$ Nichtnulleinträge).

—

**Abgabe**: Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **29.5.2009**, **9.45 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. **Beachten Sie, dass zu spät oder falsch abgegebene Blätter mindestens eine Punktreduktion um die Hälfte erhalten.** Bevor Sie Übungsblätter abgeben, tragen Sie sich bitte in die Datenbank ein (den Link dazu finden Sie auf der Vorlesungshomepage).