Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte
und Numerische Mathematik

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

9. Übungsblatt

Aufgabe 1: (8 Punkte)
Zwei einfache iterative Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = y$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x, y \in \mathbb{R}^n$ sind das

- Gesamtschrittverfahren (Jacobi-Verfahren): Für $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ bestimme $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ als

$$\text{Für } i = 1, \ldots, n: \; x_i^{(k+1)} := \frac{1}{A_{ii}} \left(y_i - \sum_{j\neq i} A_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

- Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel-Verfahren): Für $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ bestimme $x^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ als

$$\text{Für } i = 1, \ldots, n: \; x_i^{(k+1)} := \frac{1}{A_{ii}} \left(y_i - \sum_{j<i} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} A_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

a) (2 Punkte) Wir zerlegen die Matrix als $A = D + L + R$ in Diagonale, untere und obere Dreiecksmatrix. Schreiben Sie dann beide in der Form $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = x^{(k)} + B(y - Ax^{(k)})$ mit geeigneten Matrizen $B = B_J$ bzw. $B = B_G$. Drücken Sie B_J und B_G mit Hilfe von D, L, R aus.

b) (1 Punkt) Wir nehmen nun an, dass die Matrix A *stark zeilenweise diagonaldominant* ist, d.h. $|A_{ii}| > 0$ und es gibt ein $\theta < 1$ mit

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| \leq \theta |A_{ii}|$$

(die Summe der Beträge der Nebendiagonalelemente einer Zeile ist kleiner als der Betrag des Diagonalelements). Drücken Sie auch diese Beziehung mit D, L, R aus.

c) (2 Punkte) Beweisen Sie die Konvergenz von Gesamt- und Einzelschrittverfahren für stark zeilenweise diagonaldominante Matrizen.

d) (3 Punkte) Implementieren Sie beide Verfahren und verwenden Sie sie zur Lösung des Systems $Ax = y$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wieviel Schritte brauchen Sie jeweils, bis der Fehlers $\|y - Ax^{(k)}\|_2$ (Euklidische Norm) kleiner als 10^{-10} ist? Bestimmen Sie aus dieser Schrittzahl k jeweils eine mittlere Konvergenzrate $\bar{\rho} = \sqrt[k]{\frac{\|y-Ax^{(k)}\|_2}{\|y-Ax^{(0)}\|_2}}$.

—

Abgabe: Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **26.6.2009**, **9.45 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik für Informatiker“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. **Beachten Sie, dass zu spät oder falsch abgegebene Blätter mindestens eine Punktreduktion um die Hälfte erhalten.**