

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen  
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 1

Abgabe: bis 29.04.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 1 (LR-Zerlegung)

(10=3+3+4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren  $b = (2, 2, 2, 2)^\top$ ,  $\bar{b} = (1, 1, 3, 2)^\top$  und  $\tilde{b} = (4, 2, 1, 3)^\top$ .

- Lösen Sie das LGS  $Mx = b$  mit dem Gauß-Algorithmus wie in der linearen Algebra.
- Lösen Sie die LGS  $Ly = b$  und  $Rx = y$ , indem Sie die Struktur von  $L$  und  $R$  ausnutzen.
- Zeigen Sie, dass  $LR = M$  gilt, und verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus b), um  $M\bar{x} = \bar{b}$  und  $M\tilde{x} = \tilde{b}$  zu lösen.

Aufgabe 2 (LR-Zerlegung)

(8 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  gegeben. Bestimmen Sie wie in der Vorlesung eine untere Dreiecksmatrix  $L$  und eine obere Dreiecksmatrix  $R$  so, dass  $A = LR$ .

Aufgabe 3 (Vorwärtssubstitution)

(10 Punkte)

Formulieren Sie einen Algorithmus zum Lösen des Gleichungssystems  $Ly = b$ , wobei  $L$  eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist. Geben Sie die Formel zur Berechnung von  $y_i$  an. Wieviele und welche Operationen (Multiplikation + Addition = Operation) sind zur Bestimmung von  $y$  nötig? Was ändert sich jeweils, wenn auf der Diagonalen von  $L$  nur Einsen stehen?

#### Aufgabe 4 (Normen)

(12=5+4+3 Punkte)

Im Folgenden definieren wir für Matrizen  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  folgende Normen (EW=Eigenwert):

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\text{größter EW von } A^T A}, \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

in der Reihenfolge auch Spaltensummen-, Spektral- und Zeilensummen-Norm genannt.

(a) Berechnen Sie folgende Matrixnormen:

$$(i) \left\| \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_1, \quad (ii) \left\| \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2, \quad (iii) \left\| \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

Wir definieren außerdem die Kondition einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch  $\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$  und schreiben  $\text{cond}_1(A)$ ,  $\text{cond}_2(A)$ ,  $\text{cond}_\infty(A)$  entsprechend der gewählten Matrixnorm  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ , beziehungsweise  $\|\cdot\|_\infty$ .

(b) Zeigen Sie, dass für symmetrische invertierbare Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt:

$$\text{cond}_2(A) = \left| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right|,$$

wobei  $\lambda_{\min}$  der betragsmäßig kleinste und  $\lambda_{\max}$  der betragsmäßig größte EW von  $A$  ist.

(c) Sei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- (i) Berechnen Sie (schlau!) die Inverse  $L^{-1}$  und begründen Sie die verwendeten Rechenschritte.
- (ii) Bestimmen Sie mit diesem Wissen  $\text{cond}_1(L)$  und  $\text{cond}_\infty(L)$ .

---

**Abgabe:** bis **spätestens 29.04.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

**Jedes Blatt beschriften:** Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

**Tackern Sie alle Blätter zusammen** und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzelnd und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 29.04.2016 statt.

**Service/Material:**

**Infos:** Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de> finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter <https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188> für die Teilnahme an den Übungen.