Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 2

Abgabe: bis 13.05.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 5 (LR-Zerlegung mit Pivotisierung) (10=4.5+4+1.5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung **mit Spaltenpivotisierung** der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 6 \\ 3 & 9/2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & -3 \\ 3/2 & 3 & -1 & -9/4 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das LGS $Ax = b$ mit $b = (40, 60, 48, 14)^T$ unter Verwendung von Teilaufgabe (a).

(c) Berechnen Sie $\det(A)$ unter Verwendung der obigen Ergebnisse.

Aufgabe 6 (Matrixnormen) (10=4+4+2 Punkte)

(a) Für eine beliebige Vektornorm $|\cdot|\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei die Abbildung $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A \longmapsto \|A\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|Ax|}{|x|}. \tag{M}$$

Zeigen Sie, dass mit $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert wird. Wir nennen $\|\cdot\|$ *Matrixnorm.*
Hinweis: *Die nachzurechnenden Eigenschaften* ***positive Definitheit***, ***Dreiecksungleichung***, ***Homogenität***, *finden Sie in der Norm-Definition im Skriptum, Kapitel 0.3*

(b) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n$ folgende Eigenschaften erfüllt:

$$(i)\ \|I\| = 1, \qquad (ii)\ |Ax| \le \|A\||x| \qquad \text{und} \qquad (iii)\ \|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

Die letzte Eigenschaft (iii) wird ***Submultiplikativität*** genannt.

(c) Sei $\|\cdot\| : A \mapsto \|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ die Spaltensummennorm wie in Aufgabe 4 auf Aufgabenblatt 1.

Zeigen Sie, dass die Vektornorm $|\cdot|_1 : |x|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\|_1$ nach der Definition einer Matrixnorm in (M) **induziert**, d. h. zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|Ax|_1}{|x|_1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Aufgabe 7 (Gleitkomma-Arithmetik) (10 Punkte)

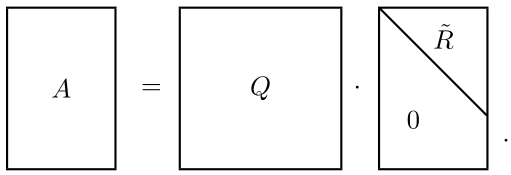
Ein Beispielrechner verwendet Gleitkommaarithmetik zur Basis $d = 2$ mit Mantissenlänge $l = 3$ und $e_{\min} = -1$, $e_{\max} = 3$. Es werden positive und negative Zahlen unterstützt.

Bestimmen Sie alle darstellbaren normierten Maschinenzahlen und tragen Sie diese auf einem Zahlenstrahl auf. Was beobachten Sie?

Bitte Rückseite beachten!

Aufgabe 8 (Householder-Transformation) (10=2+2+1+1.5+1+1+1.5 Punkte)

Bei der QR-Zerlegung einer **rechteckigen** Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ bestimmt man eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine Matrix $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreicksmatrix ist, sodass



Zur Berechnung der QR-Zerlegung kann unter anderem eine Householder-Transformation durchgeführt werden. Dabei ist Q^T als Produkt von sogenannten Householdermatrizen $H_j, j = 1, \dots, n$ gegeben, also $Q^T = H_n \cdot H_{n-1} \cdots H_1$.

Eine Householder-Matrix berechnet sich mit einem gegebenen $v \in \mathbb{R}^n$ über

$$H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T .$$

(a) Sei $z = (1, 2, 3)^T$ und $x = (0, 1, 1)^T$. Berechnen Sie $Z = z \cdot z^T$ und das sogenannte SAXPY $s = x - z \cdot z^T \cdot x$.

(b) Weshalb ist es in der Definition von H zur Auswertung von $H \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ NICHT sinnvoll das Produkt vv^T zu berechnen? Denken Sie bei Ihrer Antwort an Speicher- und Rechenaufwand bei der Auswertung von $H \cdot x$.

Zeigen Sie:

(c) H ist symmetrisch.

(d) H ist orthogonal, das heißt $H^{-1} = H^T$.

(e) $Hv = -v$

(f) $Hw = w$ für alle $w \in \operatorname{span}\{v\}^\perp$, also alle w in der Hyperebene senkrecht zu v. (siehe auch Kapitel 0.3 im Skriptum für die Definition von Orthogonalität im Sinne des Standard-Skalarproduktes)

(g) Bestimmen Sie mit dem Wissen aus den vorigen Aufgebenteilen die Eigenwerte von H und deren algebraische Vielfachheiten.

Abgabe: bis **spätestens 13.05.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerische Mathematik für Informatik und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

Jedes Blatt beschriften: Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

Tackern Sie alle Blätter zusammen und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzeln und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 13.05.2016 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188 für die Teilnahme an den Übungen.