Numerische Mathematik für die Fachrichtungen
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 3

Abgabe: bis 20.05.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 9 (Cholesky-Zerlegung)

(11=2+4+5 Punkte)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit falls gilt $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiere eine invertierbare untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & \dots & l_{nn} \end{pmatrix},$$

so, dass $A = LL^T$. Wir nennen diese Zerlegung *Cholesky-Zerlegung* (oder kurz *C-Zerlegung*)von A.

(a) Zeigen Sie: A ist symmetrisch und positiv definit.

(b) Zeigen Sie,

(i) dass für die Diagonalelemente von A gilt:

$$a_{jj} = l_{j1}^2 + l_{j2}^2 + \dots + l_{jj}^2 = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2, \qquad j = 1, \dots, n.$$

(ii) dass für die Elemente a_{ij} $(i > j)$ der $j$ten Spalte unterhalb des Diagonalelements gilt:

$$a_{ij} = l_{i1}l_{j1} + l_{i1}l_{j1} + \dots + l_{ij}l_{jj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk}, \qquad j = 1, \dots, n, \ i > j.$$

(c) Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme von Teil (b) die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

und nutzen Sie die Zerlegung zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für $b = (4, 1, 21)^T$.

Aufgabe 10 (Stabilität des Gauß-Algorithmus)

(14=6+6+2 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A ohne Pivotisierung im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und lösen Sie anschließend das LGS $Ax = b$.

(b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A ohne Pivotisierung in den Maschinenzahlen mit $d = 10$, $l = 2$, $e_{\text{min}} = -3$ und $e_{\text{max}} = 4$ und lösen Sie anschließend das LGS $A\hat{x} = b$ in den Maschinenzahlen.

(c) Berechnen Sie den relativen Fehler von $\hat{x}$ in der $|\cdot|_1$-Norm, d.h. berechnen Sie $\frac{|x-\hat{x}|_1}{|x|_1}$.

Bitte Rückseite beachten!

Bonusaufgabe:

Aufgabe 11 (LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche (Bonusaufgabe)) (10=5+3+2 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -8 \\ -1 & -4 & -8 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Spaltenpivotsuche und geben Sie dabei die Permutationsmatrix P, sowie L und R explizit an.

(b) Lösen Sie damit das LGS $Ax = b$.

(c) Berechnen Sie die $\det(A)$, indem Sie die obige LR Zerlegung ausnutzen.

Abgabe: bis **spätestens 20.05.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerische Mathematik für Informatik und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

Jedes Blatt beschriften: Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

Tackern Sie alle Blätter zusammen und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzeln und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 20.05.2016 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188 für die Teilnahme an den Übungen.