Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2016
JProf. Katharina Schratz, Dipl.-Math. techn. Patrick Krämer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 4

Abgabe: bis 10.06.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 12 (Cholesky-Zerlegung) (10 Punkte)

Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A symmetrisch und positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \gamma \\ 1 & 2 & 3 \\ \beta & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Algorithmus zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung von Aufgabe 9.

Aufgabe 13 (Ausgleichsrechnung) (10=3+4+3 Punkte)

Die tollkühne Archäologin Diana Senoj, die nie einen Filzhut trägt - unterwegs als tollpatschige Schatzjägerin - ist in einer im Amazonas-Regenwald gelegenen Höhle auf der Suche nach der sogenannten Lundesbade, einer mit Silber überzogenen Holztruhe. In einer großen Halle in der Höhle angekommen, schießen zum Schutz vor Schatzräubern plötzlich aus 5 Stellen in der Wand Pfeile heraus, die alle an einem bestimmten Punkt dieser Halle vorbeifliegen. Diana Senoj vermutet, dass die Lundesbade an diesem Punkt im Boden vergraben ist. (*)

Um diesen Punkt genauer zu bestimmen, benutzt sie ein (x, y)-Koordinatensystem und notiert sich die Punkte (x, y), an denen die Pfeile aus der Wand schießen, und die Tangenswerte der Pfeil-Richtungswinkel α, die von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen werden.

Pfeilstelle	1	2	3	4	5
X-Koordinate	10	2	4	6	10
Y-Koordinate	2	4	8	13	12
$\tan\alpha$	2	0.5	0	-1	-2

((*) Die Geschichte und alle Namen wurden vom Übungsleiter frei erfunden. Zufällige Ähnlichkeiten zu bekannten Begebenheiten sind gewollt, es werden allerdings keine zu finden sein.)

(a) Stellen Sie die Situation anhand einer Skizze dar und schätzen Sie den Ort $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Lundesbade.

(b) Jede Messung entspricht einer Geradengleichung in den Unbekannten (x, y). Stellen Sie mit Hilfe aller Messungen ein lineares Ausgleichsproblem auf.

(c) Berechnen und lösen Sie die das Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalengleichung.

Aufgabe 14 (Newton-Verfahren) (15=2+5+4+4 Punkte)

Gegeben seien der Kreis $K = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 3\}$ sowie die Hyperbel $H = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 2\}$.

(a) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte von K und H.

(b) Formulieren Sie das Problem aus a) als Nullstellenproblem $F(x, y) = (0, 0)^\top$ mit einer geeigneten Funktion $F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und geben Sie für dieses Problem das Newton-Verfahren mit Startwert $(x^0, y^0)^\top = (1, 1)^\top$ an.

(c) Führen Sie das Newton-Verfahren für das Problem aus b) aus, wobei Sie dieses abbrechen, sobald $|\Delta(x, y)^k|_2 < 0.1$ gilt, wobei $\Delta(x, y)^k = (x^{k+1}, y^{k+1})^T - (x^k, y^k)^T$.

(d) Betrachten Sie für festes $\epsilon > 0$ statt F aus b) die Funktion $F_\epsilon = \epsilon F$. Geben Sie die Lösungen von $F_\epsilon(x, y) = (0, 0)^\top$ an und formulieren Sie das Newton-Verfahren für diese Gleichung.

Erklären Sie an diesem Beispiel, warum die Stoppregel $|F(x^k, y^k)|_2 <$ tol im Gegensatz zu $|\Delta(x, y)^k|_2 <$ tol für das Newton-Verfahren nicht sinnvoll ist.

Bitte nächste Seite beachten!

Aufgabe 15 (QR-Zerlegung) (10=2+5+2+1 Punkte)

Zu $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir eine Householder-Matrix als $H = I - \frac{2}{v^T v} vv^T$. Diese Matrix ist symmetrisch, positiv definit, orthogonal und besitzt die Eigenräume $E_{-1} = \operatorname{span}\{v\}$ und $E_1 = \operatorname{span}\{v\}^\perp$ (siehe Aufgabe 8).

(a) Sei $v = x - \sigma|x|e_1$ für $x \neq 0$, $x \notin \operatorname{span} e_1$, wobei $\sigma = \operatorname{sign}(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 > 0 \\ -1, & x_1 < 0 \end{cases}$

Zeigen Sie, dass für die Householder-Matrix zu diesem v gilt:

$$Hx = \sigma|x|e_1.$$

Anleitung zur Berechnung der QR-Zerlegung:
Mit dem Wissen aus Aufgabe 15 (a) ist es nun möglich zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, $\operatorname{rang} A = n$ iterativ eine QR-Zerlegung $A = QR$ zu berechnen mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1.) Im ersten Schritt setze $x^1 = Ae_1 \in \mathbb{R}^m$, $\sigma^1 = \operatorname{sign}(x^1_1)$ und bilde für $v_1 = x^1 - \sigma^1|x^1|e_1$ die Householder-Matrix H_1. Dann erhalten wir mit $r_{11} = \sigma^1|x^1|$:

$$H_1 A = \begin{pmatrix} r_{11} & \star \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

2.) Nach k Schritten haben wir Householder-Matrizen $H_1, \dots, H_n$ konstruiert mit

$$H_k H_{k-1} \cdots H_1 A = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1k} & \\ & \ddots & \vdots & R'_k \\ 0 & & r_{kk} & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1} \end{pmatrix}, R'_k \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}, A_{k+1} \in \mathbb{R}^{(m-k)\times(n-k)}.$$

3.) Im $(k+1)$-ten Schritt wähle Householder-Matrix $\tilde{H}_{k+1}$ so, dass $x^{k+1} = A_{k+1}e_1 \in \mathbb{R}^{m-k}$ auf $r_{k+1,k+1}e_1 = \sigma^{k+1}|x^{k+1}|e_1$ abgebildet wird. Wir setzen $H_{k+1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{k+1} \end{pmatrix}$ so, dass bei der Multiplikation mit H_{k+1} von links die ersten k Zeilen unverändert bleiben. Dann haben wir:

$$H_{k+1} H_k \cdots H_1 A = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1k} & & \\ & \ddots & \vdots & R'_k & \\ 0 & & r_{kk} & & \\ 0 & \cdots & 0 & r_{k+1,k+1} & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{k+2} \end{pmatrix}, R'_k \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}, A_{k+2} \in \mathbb{R}^{(m-k-1)\times(n-k-1)}.$$

4.) Nach n Schritten ergibt sich dann

$$\underbrace{H_n H_{n-1} \cdots H_1}_{:=Q^T} A = R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = (H_n H_{n-1} \cdots H_1)^T.$$

(b) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und geben Sie die Matrizen Q und R explizit an.

(c) Begründen Sie mit Hilfe der oben berechneten QR Zerlegung für welche der folgenden Vektoren das überbestimmte LGS $Ax = b$ lösbar ist.

$$(i) \quad b = (2, -1, 4)^T, \qquad (ii) \quad b = (2, -1, 6)^T.$$

(d) Nutzen Sie in **beiden** Fällen die QR-Zerlegung zur Berechnung eines Lösungsvektors x und berechnen Sie außerdem das Residuum $\|Ax - b\|_2$ in **beiden** Fällen wie in der Vorlesung.

Bitte nächste Seite beachten!

Abgabe: bis **spätestens 10.06.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerische Mathematik für Informatik und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

Jedes Blatt beschriften: Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

Tackern Sie alle Blätter zusammen und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzeln und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 10.06.2016 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188 für die Teilnahme an den Übungen.