Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt zur Taylorreihe (keine Abgabe!) **keine Abgabe!**

Satz von Taylor: (vgl. [W. Walter, Analysis 1 (4. Auflage, Springer-Verlag), 1997, Kapitel 10.15])
Sei $k \geq 0$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenens Intervall und $f\colon J \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(J)$, d.h. eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Weiter seien $a, x \in J$.
Dann existiert für f die folgende Darstellung

$$f(x) = T_k(x;a) + R_k(x;a), \tag{1}$$

wobei das k-te **Taylorpolynom** T_k **bezüglich der Stelle** a und das zugehörige **Restglied** $R_k(x;a)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} T_k(x;a) &:= \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ R_k(x;a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir nennen T_k auch die k**-te Taylor-Entwicklung von** f **um den Punkt** a.
Ist $f \in C^\infty(J)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, so existiert die (unendliche) **Taylor-Reihe**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

genau dann, wenn $R_k(x;a) \to 0$ für $k \to \infty$.

Bemerkung: Diese Ergebnisse lassen sich verallgemeinern auf glatte Funktionen $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Für die Vektoren $x, a \in U$ ist dann jedoch $f'(a) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Jacobimatrix zu f gegeben durch

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

und $f'(a)(x-a)$ ist eine Matrix-Vektor- Multiplikation.

Aufgabe 16 (Taylor-Entwicklung (keine Abgabe))

Sei $f_1 : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + 2x}$.

(a) Bestimmen Sie das größtmögliche Intervall J so, dass $f_1 \in C^\infty(J)$, also f_1 unendlich oft stetig differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie das 3-te Taylorpolynom $T_3(x;a)$ von f_1 um den Punkt $a = -\frac{1}{8}$

(c) Zeigen Sie, dass für den Fehler des k-ten Taylorpolynoms $T_k(x;b)$ von $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^{k+1}(I)$ um den Punkt $b \in I$ gilt:

$$|g(x) - T_k(x;b)| \leq \frac{|x-b|^{k+1}}{(k+1)!} \max_{\xi \in I} \left| g^{(k+1)}(\xi) \right|.$$

Sei $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) \cdot e^{2x_2} \\ x_1^4 x_2^2 \end{pmatrix}$.

(d) Bestimmen Sie das 1-te Taylorpolynom $T_1(x;x_0)$, $x \in \mathbb{R}^2$ von f_2 um den Punkt $x_0 = (\pi, 2)^T$.

Lösung/Hinweise:

(a) $J = (-\frac{1}{4}, \infty)$

(b) $$\begin{aligned} T_3(x; -\frac{1}{8}) &= \frac{1}{2} + 2(x + \frac{1}{8}) + \frac{-8}{2!}(x + \frac{1}{8})^2 + \frac{96}{3!}(x + 1/8)^3 \\ &= \frac{3}{4} + 2x - 4(x + \frac{1}{8})^2 + 16(x + 1/8)^3 \end{aligned}$$

(c) **Hinweis:** $|g(x) - T_k(x; b)| = |R_k(x; b)| = \left| \int_b^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt \right|$

(d) $$\begin{aligned} T_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} \right) &= f_2(\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}) + f_2'(\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix})(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} -e^4 \\ 4\pi^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2e^4 \\ 16\pi^3 & 4\pi^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^4 - 2e^4(x_2 - 2) \\ 4\pi^4 + 16\pi^3(x_1 - \pi) + 4\pi^4(x_2 - 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$