Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 5

Abgabe: bis 24.06.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 17 (Banachscher Fixpunktsatz) (10=4+2+4 Punkte)

Gegeben seien die beiden Funktionen $g(x) := \frac{1}{2}(x + e^{-x})$ und $h(y) := \frac{1}{6}(5y + e^{-y})$.

(a) Zeigen Sie, dass sowohl $g(x)$ als auch $h(y)$ jeweils im Intervall $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt x^* bzw. y^* besitzen und dass die jeweilige Fixpunktiteration

$$(i) \quad x_{m+1} := g(x_m), \quad \text{bzw.} \quad (ii) \quad y_{m+1} := h(y_m)$$

für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ bzw. $y_0 \in [0, 1]$ gegen x^* bzw. y^* konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass $x^* = y^*$ gilt.

(c) Es seien die Startwerte $x_0 = y_0 = 0$ der Fixpunktiteartionen (i) und (ii) gegeben. Berechnen Sie für beide Verfahren (i) und (ii), wieviele Iterationsschritte jeweils mindestens nötig sind um

$$|x_m - x^*| < 10^{-3}, \quad \text{bzw.} \quad |y_m - y^*| < 10^{-3}$$

garantieren zu können.

Welches der beiden Verfahren (i) und (ii) konvergiert schneller?

Aufgabe 18 (Polynom-Interpolation) (15=5+2.5+7.5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{12}{2+x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ und die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3 zu f in Newton-Gestalt.

(b) Durch Hinzunahme des Knotens $x_4 = 3$ soll f neu interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 mit möglichst geringem Aufwand.

(c) Beweisen Sie für das Interpolationspolynom p_2 die Fehlerabschätzung

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Hinweis: Hier muss p_2 NICHT explizit berechnet werden! Beachten Sie das Intervall über dem der Fehler gemessen wird!

Aufgabe 19 (Lagrange-Polynome) (7=2+5 Punkte)

Zu den verschiedenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ seien $L_i(x)$ die Lagrange-Polynome und $c_i := L_i(0)$. Zeigen Sie:

(a)
$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) \equiv 1\,.$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^s = \begin{cases} 1 & \text{für } s = 0\,, \\ 0 & \text{für } s = 1, 2, \ldots, n\,, \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n & \text{für } s = n+1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 20 (Tschebyscheff-Interpolation) (8 Punkte)

Die Tschebyscheff-Polynome sind rekursiv gegeben über

$$T_0(x) = 1, \quad , T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Das Polynom p sei gegeben in seiner Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen,

$$p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1 T_1(x) + \cdots + c_n T_n(x)\,.$$

Falls

$$\begin{aligned} d_k &= c_k + 2x d_{k+1} - d_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0), \quad d_{n+1} = d_{n+2} = 0\,, \\ e_k &= d_k + 2x e_{k+1} - e_{k+2} \quad (k = n, n-1, \ldots, 0), \quad e_{n+1} = e_{n+2} = 0\,, \end{aligned}$$

dann ist bekanntlich $p(x) = \frac{1}{2}(d_0 - d_2)$ (Clenshaw). Zeigen sie, dass außerdem gilt:

$$p'(x) = e_1 - e_3\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ableitung $p'(x) = \frac{1}{2}(d_0' - d_2')$, stellen eine Behauptung zu einem Zusammenhang zwischen d_i' und e_{i+1} auf und beweisen Sie diesen.

Abgabe: bis **spätestens 24.06.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerische Mathematik für Informatik und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

Jedes Blatt beschriften: Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

Tackern Sie alle Blätter zusammen und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzeln und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 24.06.2016 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188 für die Teilnahme an den Übungen.