Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 6

Abgabe: bis 08.07.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 21 (Anwendung von Quadraturformeln) (7.5=1+2.5+4 Punkte)

Im Folgenden definieren wir für eine stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die zusammengesetzte Trapezrepel zur Approximation von $\int_a^b f(t)dt$:

Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Dann ist die **zusammengesetzte Trapezregel** zu dieser Unterteilung gegeben durch

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t$ auf folgende Arten:

(a) analytisch,

(b) mit der Simpson-Regel (einmalige Anwendung)

(c) mit der zusammengesetzten Trapezregel unter Verwendung der Werte aus der folgenden Tabelle.

t	$\sin(t)$
0	0
$\pi/6$	0.5
$\pi/4$	$0.5\sqrt{2}$
$\pi/3$	$0.5\sqrt{3}$
$\pi/2$	1

Aufgabe 22 (kubischer Spline) (10 Punkte)

Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $S_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S(t) = \begin{cases} (t+1)^4 + \alpha(t-1)^4 + 1, & -1 \le t \le 0 \\ -t^3 - 8\alpha t + \gamma, & 0 < t \le 1 \\ \beta t^3 + \delta t^2 + 14t - 1, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\Delta := \{-1, 0, 1, 2\}$ ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich welche Eigenschaften für einen kubischen Spline bzgl. Δ charakteristisch sind.

Aufgabe 23 (Spline Interpolation) (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Spline-Interpolation für glatte Funktionen in C^2 kennen gelernt. Jedoch lässt sich die Idee auch auf nicht glatte Funktionen erweitern.

Hierzu betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Interpolieren Sie f in den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ durch einen eingespannten kubischen Spline S mit hermiteschen Randbedingungen bezüglich f, d.h. mit Werten $f'(-1)$, $f'(1)$ für die Ableitung S' in den Randpunkten $a = -1$ und $b = 1$.

Hinweis: Betrachten Sie f stückweise auf Intervallen J, auf denen $f \in C^1(J)$.

Bitte nächste Seite beachten!

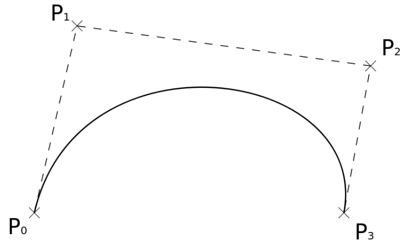
Aufgabe 24 (Bernsteinpolynome) (12.5=1+2.5+3+1.5+4.5 Punkte)

Beziér-Kurven sind häufig in der Computergrafik anzutreffen. Zu gegebenen Kontrollpunkten $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ist eine Beziér-Kurve $C(t)$ für $t \in [0,1]$ definiert über

$$C(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) P_k.$$

Die Kontrollpunkte $P_0, \ldots, P_n$ dienen dazu, den Verlauf der Kurve zu kontrollieren.
Die sogenannten Bernstein-Polynome $B_k^n(t)$ vom Grad n sind definiert über

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n\,.$$



Kubische Bezierkurve zu Kontrollpunkten P_0, P_1, P_2, P_3.
Quelle: Wikipedia

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Bernstein-Polynome:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) = 1 \quad \forall\, t \in [0,1].$

(b) $B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1, \quad B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1.$
Folgern Sie hieraus, dass C die Punkte P_0 und P_n interpoliert, also $C(0) = P_0$ und $C(1) = P_n$ gilt.

(c) B_k^n hat genau ein Maximum in $[0,1]$ und zwar bei $t = \frac{k}{n}$.

(d) Für $1 \leq k \leq n$ gilt die Rekursionsformel

$$B_k^n(t) = (1-t) B_k^{n-1}(t) + t B_{k-1}^{n-1}(t)\,.$$

(e) Die Bernstein-Polynome $\{B_k^n, k = 0, \ldots, n\}$ bilden eine Basis des Polynomraumes $\mathcal{P}_n$.

Nur zur Info (kein Beweis!):

Aus der Rekursionsformel von Teilaufgabe *d*) lässt sich schließlich auch der sogenannte de Casteljau Algorithmus zur rekursiven Berechnung von $C(t)$ herleiten (siehe Abschnitt 4.3.2 im Skriptum). Mehr zu Beziérkurven finden Sie im Skriptum in Kapitel 4.3.1.

Abgabe: bis **spätestens 08.07.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerische Mathematik für Informatik und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

Jedes Blatt beschriften: Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

Tackern Sie alle Blätter zusammen und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzeln und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 08.07.2016 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188 für die Teilnahme an den Übungen.