Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 7

Abgabe: bis 22.07.2016 um 9:00 Uhr

Aufgabe 25 (Ordnung einer Quadraturformel) (10=1+1.5+6+1.5 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition der Ordnung einer Quadraturformel an.

(b) Geben Sie Bedingungen für $b_i, c_i, i = 1, \dots, s$ an so, dass die Quadraturformel
$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)\sum_{i=1}^{s} b_i f(a + c_i(b-a))$$
die Ordnung $p = 4$ besitzt

(c) Bestimmen Sie die Gewichte $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ zu den Knoten $\xi_1 = -\frac{1}{2}, \xi_2 = 0$ und $\xi_3 = \frac{1}{2}$ so, dass
$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{i=1}^{3} \omega_i\, P(\xi_i)$$
für Polynome P vom Grad 2 ($P \in \mathbb{P}_2$).

(d) Zeigen Sie, dass die Quadraturformel aus (c) sogar exakt für $P \in \mathbb{P}_3$ ist.

Aufgabe 26 (Ordnung der summierten Quadratur) (10=5+5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für den Fehler der Trapezregel gilt:
$$\left| \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}_{=:I(f)} - \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f''(x)|.$$
Interpretieren Sie hierzu den Term $\frac{h}{2}\big(f(x_0)+f(x_0+h)\big) = I(\hat{f})$ als Integral über eine Funktion $\hat{f}$, die f in den Punkten x_0 und $x_0 + h$ interpoliert, und nutzen Sie die Restgliedformel der Polynominterpolation aus.

(b) Zeigen Sie, dass die summierte Trapezregel (vgl. Blatt 6, Aufgabe 21)
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} =: I_{T,n}^{[a,b]}(f).$$
zu einer äquidistanten Unterteilung $x_k = a + kh, k = 0, \dots, n$ des Intervalls $[a, b]$ mit $h = (b-a)/n$ quadratisch in h gegen das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, d.h. zeigen Sie, dass
$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_{T,n}^{[a,b]}(f) \right| \leq Ch^2.$$
Bestimmen Sie dazu die Konstante C explizit in Abhängigkeit von f.

Aufgabe 27 (Ordnung einer Quadraturformel (Bonus)) (10 (Bonus-) Punkte)

Gegeben sei das Integral $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bestimmen Sie eine Quadraturformel mit Knoten $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = 1$ von maximaler Ordnung. Welche Ordnung besitzt sie?

Bitte nächste Seite beachten!

Aufgabe 28 (Runge-Kutta-Verfahren) (15=1+2+4+3+[5] Punkte)

Gegeben sei für $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $f \in C^4$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$ das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(y(t)) \qquad \text{für } t \geq 0 \qquad y(0) \quad = y_0. \tag{AP}$$

(a) Geben Sie die Lösung $y(t)$ zum Zeitpunkt $t > 0$ unter Zuhilfename von (AP) in Form einer Integralgleichung an.

Für diskrete Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ mit $t_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots$ und $0 < h < 1$ sei ein Schritt des *expliziten Eulerverfahrens* zur näherungsweisen Lösung von (AP) gegeben durch die Vorschrift

$$y_{i+1} := y_i + hf(y_i) \approx y(t_i + h), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{E}$$

(b) Geben Sie an, **welche Quadraturformel** hier zur Berechnung eines expliziten Euler-Schrittes $y_i \mapsto y_{i+1}$ angewandt wird und schließen Sie hieraus auf die **Ordnung** p **des Verfahrens**, d.h. bestimmen Sie das maximale p, das $\|y(t_1) - y_1\| \leq Ch^{p+1}$ erfüllt.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung von $y(t)$ die Abschätzung aus (b), d.h. zeigen Sie, dass mit p aus Teilaufgabe (b) gilt:

$$\|y(t_1) - y_1\| \leq Ch^{p+1}$$

mit einer Konstanten C, die von f' abhängt, wobei $y_1 \approx y(t_1)$ mit dem Euler-Verfahren (E) berechnet wurde.

Nun soll anstelle des expliziten Euler-Verfahrens zur numerischen Lösung von (AP) das Verfahren mit folgender Vorschrift angewandt werden:

$$y_{i+1} := y_i + h\frac{f(y_i) + f(y_{i+1})}{2} \approx y(t_i + h), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{V}$$

(d) Geben Sie an, **welche Quadraturformel** hier zur Berechnung eines Schrittes $y_i \mapsto y_{i+1}$ mit dem Verfahren (V) angewandt wird und schließen Sie hieraus auf die **Ordnung** p **des Verfahrens**, d.h. bestimmen Sie das maximale p, das $\|y(t_1) - y_1\| \leq Ch^{p+1}$ erfüllt.

Welches der beiden Verfahren (E) und (V) liefert für $0 < h \ll 1$ nach einem Schritt einen kleineren Fehler?

(e) **[Bonusaufgabe:]**

Sei nun $d = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung von $y(t)$ die Abschätzung aus (b), d.h. zeigen Sie, dass mit p aus Teilaufgabe (d) gilt:

$$\|y(t_1) - y_1\| \leq Ch^{p+1}$$

wobei $y_1 \approx y(t_1)$ mit dem Verfahren (V) berechnet wurde.
Von welcher Ableitung $f^{(k)}$ von f hängt hier die Konstante C ab?

Abgabe: bis **spätestens 22.07.2016 um 9:00 Uhr** im Kasten mit der Aufschrift "Numerische Mathematik für Informatik und Ingenieurwesen" im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen.

Jedes Blatt beschriften: Nummer des Übungsblattes, **Name und Matrikelnummer**.

Tackern Sie alle Blätter zusammen und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg les- und nachvollziehbar. Die abgegebenen Aufgaben müssen **einzeln und handschriftlich bearbeitet** sein.

Für den Übungsschein sind 50% der Gesamtpunkte aller Übungsblätter hinreichend.

Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 22.07.2016 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainf2016s/de finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/188 für die Teilnahme an den Übungen.