

## Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss  
Dipl.-Math. Markus Bürg

### 10. Übungsblatt

#### Aufgabe 1: (4+1 Punkte)

- a) (2.5 Punkte) Das einfachste iterative Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix  $A$  ist die Iteration

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\omega}{\|A\|_2} (b - Ax_k) \quad , k \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

mit einem Dämpfungsfaktor  $\omega \in (0, 2)$ .

Zeigen Sie, dass diese Iteration in der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  konvergiert.

- b) (1 Bonuspunkt) Zeigen Sie, dass auch das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{\|A^T A\|_2} A(b - Ax_k) \quad , k \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

für jede quadratische symmetrisch positiv definite Matrix  $A$  in der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  konvergiert.

- c) (1.5 Punkte) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & -18 & 19 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 20 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit Iterationsverfahren (1) für  $\omega \in \{0.5, 1, 1.5\}$ , sodass gilt:

$$\|x - x_k\|_2 < 10^{-9}$$

Wie viele Iterationen benötigen Sie?

#### Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, dass für  $k = 1, \dots, n$  die Eigenvektoren  $\phi_k$  durch

$$\phi_{k,i} := \sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

und die Eigenwerte  $\lambda_k$  durch

$$\lambda_k := 2 \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

gegeben sind. Wie groß ist die Spektralkondition von  $A$ ?

---

**Abgabe:** Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **25.6.2010, 9.45 Uhr** in die Einwurfkästen "Numerik für die Fachrichtung Informatik und Ingenieurwesen" im 1. OG des Allianzgebäudes. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen. Bevor Sie Übungsblätter abgeben, tragen Sie sich bitte in die Datenbank ein (den Link dazu finden Sie auf der Vorlesungshomepage).