

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 1

Sommersemester 2012

Aufgabe 1 (Normen)

16 Punkte

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n .

- (a) (1 Punkt) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls $sx + (1-s)y \in M$ für alle $x, y \in M$ und alle $s \in (0, 1)$ gilt.

Zeigen Sie: Die Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ist konvex.

Im Folgenden definieren wir für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 0 < p < \infty, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

- (b) (2 Punkte) Skizzieren Sie die Einheitskreise $K_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ für $p = \frac{1}{2}, 1, 2, \infty$.
- (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$. Geben Sie für jede Ungleichung einen Vektor $x \neq 0$ an, für den Gleichheit gilt.
- (d) (1 Punkt) Warum ist $\|\cdot\|_p$ für $p = \frac{1}{2}$ keine Norm auf \mathbb{R}^n mit $n \geq 2$?

Zusätzlich definieren wir für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $p \geq 1$ oder $p = \infty$ die Matrixnorm

$$\|A\|_p := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \right) = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

- (e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm submultiplikativ ist, d.h. für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$$

- (f) (2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\|A\|_p < 1$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0.$$

Gilt auch die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel)

- (g) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die ∞ -Norm

$$\|A\|_\infty := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \right)$$

gilt

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- (h) (2 Punkte) Berechnen Sie (evtl. mit Hilfe eines Rechners) die p -Norm des Vektors

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für $p = 1, p = 2, p = 4, p = 8$ und $p = 16$, sowie dessen Maximumnorm. Was fällt Ihnen auf?

Anmeldung zum Übungsbetrieb:

Melden Sie sich bitte unter <https://ruprecht.mathematik.uni-karlsruhe.de/sso/160/> zum Übungsbetrieb an. Die Authentifizierung geschieht dabei über die KIT-Emailadresse. Dadurch können Sie auch an der Mailingliste teilnehmen und einen Überblick über Ihren Punktestand in den Übungen erhalten.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, den 26.04.2012, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern.

Service/Material:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainfing2012s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder: Donnerstag, 11.30-12.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Dienstag, 13.30-14.30 Uhr und nach Vereinbarung