Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen — Übungsblatt 3

Sommersemester 2012

Aufgabe 5 (Normalengleichung) **4 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. $P_{\text{Bild}(A)}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ bezeichne den Orthogonalprojektor auf das Bild von A. $P_{\text{Kern}(A)^\perp}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezeichne die Orthogonalprojektion auf das orthogonale Komplement des Nullraums Kern(A) von A. Mit A^+ wird die Pseudoinverse von A bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) $\text{Kern}(A^T) = \text{Bild}(A)^\perp$.

(b) (1 Punkt) $AA^+ \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist die orthogonale Projektion auf $\text{Bild}(A) \subset \mathbb{R}^m$.

(c) (1 Punkt) Mit $b = Aw, w \in \mathbb{R}^n$ ist die Minimum-Norm-Lösung x^+ der Gleichung $Au = b$ durch

$$u^+ = P_{\text{Kern}(A)^\perp} w$$

gegeben.

Aufgabe 6 (Ausgleichsproblem der Piraten) **4 Punkte**

Auf Marley Island ist ein Unglück passiert: Die Gouveneurin Ylaine(*) wurde vom bösen Geisterpiraten LeZuck(*) entführt. Der mächtige Pirat G. Ulysses Seepgood(*) macht sich auf den Weg, um seine große Liebe zu retten. Allerdings weiß er nicht, wo er suchen soll. Zum Glück sendet Ylaines Diamantring in einer Frequenz, die G. Seepgood mit seinem dreiköpfigen Voodoo-Schrumpf-Affen empfangen kann. So macht er sich auf den Weg an fünf Positionen auf der Insel und markiert die Richtungen, von denen er die Strahlung des Diamantringes (näherungsweise) empfängt.

Um seine Daten zu sichern, benutzt er ein (x, y)-Koordinatensystem und notiert sich die Tangenswerte der Richtungswinkel α, die von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen werden.

Standort	1	2	3	4	5
X-Koordinate	3	0	5	6	1
Y-Koordinate	5	11	15	3	8
$\tan\alpha$	1/3	-1/3	-1	1	0

(*) Ähnlichkeiten mit "bekannten" Persönlichkeiten oder Gegebenheiten sind rein zufällig und nicht gewollt, da die Namen vom Übungsleiter bis zur Unkenntlichkeit geändert worden sind.

(a) (1 Punkt) Stellen Sie die Situation anhand einer Skizze dar und schätzen Sie den Ort $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ an der sich Ylaine befinden könnte.

(b) (2 Punkte) Jede Messung entspricht einer Geradengleichung in den Unbekannten (x, y). Stellen Sie mit Hilfe aller Messungen ein (überbestimmtes) Gleichungssystem auf.

(c) (1 Punkt) Berechnen und lösen Sie die Normalengleichung als Ausgleichsproblem.

Aufgabe 7 (Ausgleichsproblem von der letzten Klausur) **4 Punkte**

Gegeben seien die 5 Wertepaare

i	0	1	2	3	4
t_i	-1	τ	1	2	4
y_i	0	0	4	2	5

.

Sei $g(t) = at + b$ ein Polynom vom Grad 1, welches die Summe der Fehlerquadrate $(g(t_i) - y_i)^2$ an den 5 Stützstellen minimiert.

(a) (1 Punkt) Geben Sie die Normalengleichung für dieses Ausgleichsproblem an, sowie explizit die verwendeten Matrizen.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie nun alle $\tau \in (-1, 1)$, so dass die minimierende Gerade $g(x)$ die Steigung $a = 1$ hat.

(c) (1 Punkt) Geben Sie für das kleinste dieser τ die Summe der Fehlerquadrate an.

Aufgabe 8 (Tikhonov-Regularisierung) **4 Punkte**

Betrachten Sie zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ die Tikhonov-Regularisierung

$$\Phi_\gamma(x) := \|Ax - b\|_2^2 + \gamma\|x\|_2^2 \stackrel{!}{=} \text{min}$$

mit dem Regularisierungsparameter $\gamma \geq 0$. Zu festem γ sei die Lösung der Minimierungsaufgabe mit $u_\gamma \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie

(a) (1 Punkt) Der Minimierer u_γ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(A^T A + \gamma I_N)x = A^T b$$

(b) (1.5 Punkte) $\Phi_\gamma(u^\gamma)$ ist für $\gamma \to 0$ monoton fallend und nach unten beschränkt.

(c) (1.5 Punkte) u_γ ist beschränkt und es gilt $\|u_\gamma\|_2 \leq \|u^+\|_2$ für alle $\gamma \geq 0$, wobei $u^+ = A^+ b$ die Minimum-Norm-Lösung ist.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, den 24.05.2012, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainfing2012s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder: Donnerstag, 11.30-12.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Dienstag, 13.30-14.30 Uhr und nach Vereinbarung