Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen — Übungsblatt 4

Sommersemester 2012

Aufgabe 9 (Einzelschritt/Gesamtschritt-Verfahren) **4 Punkte**

Gegeben sei das lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 4.4 aus der Vorlesung: Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) konvergiert, das Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren) jedoch nicht.

Aufgabe 10 (symmetrisches Iterationsverfahren) **3 Punkte**

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und regulär, sowie $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Betrachten Sie für $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Iteration

$$\begin{aligned} x^{k+1/2} &= x^k + N(b - Ax^k), \\ x^{k+1} &= x^{k+1/2} + N^T(b - Ax^{k+1/2}). \end{aligned} \tag{1}$$

(a) (1.5 Punkte) Zeigen Sie, dass (1) einer Iteration

$$x^{k+1} = x^k + \hat{N}(b - Ax^k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

mit symmetrischem $\hat{N}$ entspricht, indem Sie $\hat{N}$ bestimmen.

(b) (1.5 Punkte) Sei A zusätzlich positiv definit. Geben Sie für die Wahl $N = (D+L)^{-1}$, wobei $D = \operatorname{diag}(A)$ und L strikte untere Dreiecksmatrix mit $A = D + L + L^T$ ist, die Matrix $\hat{N}$ für (2) an (Umformen in eine einfachere Form!). Weisen Sie ferner nach, dass $\hat{N}$ positiv definit ist.

Aufgabe 11 (cg-Verfahren) **3 Punkte**

Gegeben sei eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenvektoren $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit

$$b = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j v_j$$

für $k \le n$.

Zeigen Sie:
Das cg-Verfahren zur Lösung von $Au = b$ liefert mit $u^0 = 0$ die exakte Lösung nach höchstens k Schritten.

Hinweis: Definieren Sie ein geeignetes Polynom $q_k(t) \in \Pi_k^*$ mit $q_k(0) = 1$ und wenden Sie Lemma 4.20 an.

Aufgabe 12 (Konvergenzgeschwindigkeit des cg-Verfahrens) **3 Punkte**

(a) (1.5 Punkte) Zeigen Sie: Um beim cg-Verfahren den Fehler in der Energienorm um einen Faktor ε zu reduzieren, d.h.

$$\|e^k\|_A = \|x - x^k\|_A \le \varepsilon \|e^0\|_A,$$

benötigt man höchstens k cg-Iterationen, wobei k die kleinste ganze Zahl ist mit

$$k \ge \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2(A)}\,\ln(2/\varepsilon).$$

Hinweis: Für $a > 1$ gilt

$$\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) > \frac{2}{a}.$$

(b) (1.5 Punkte) Das cg-Verfahren werde auf eine positiv definite Matrix A angewendet. Es ist lediglich bekannt, dass $\|e^0\|_A = 1$ und $\|e^{10}\|_A = 2^{-9}$ ist. Berechnen Sie aus diesen Informationen eine untere Schranke für $\kappa_2(A)$ und überprüfen Sie damit die Ungleichung aus a).

Aufgabe 13 (Programmierung des cg-Verfahrens) **3 Punkte**

Gegeben seien die symmetrisch positiv definite Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 Punkte) Implementieren Sie das cg-Verfahren in einer Programmiersprache Ihrer Wahl (Empfehlung: Matlab), so dass alle Zwischenschritte ausgegeben werden (inklusiver sinnvoller Bezeichnung der Variablennamen). Lösen Sie mit Hilfe des Programms das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Startvektor $x^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$. Drucken Sie das Programm, sowie die Lösung inklusiver aller Zwischenschritte aus. Für diese Teilaufgabe wird die gedruckte Lösung akzeptiert. Alternativ dürfen Sie auch eine handschriftliche Rechnung abgeben.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie die A-Orthogonalität der Vektoren p^k, die während des cg-Verfahrens auftreten (hierfür darf Ihr Programm verwendet werden, geben Sie dazu bitte aus, was berechnet wird).

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Mittwoch, den 06.06.2012, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainfing2012s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder: Donnerstag, 11.30-12.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Dienstag, 13.30-14.30 Uhr und nach Vereinbarung