Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

# Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen — Übungsblatt 5

Sommersemester 2012

**Aufgabe 14** (Eigenwertbestimmung einer symmetrischen Matrix) **6 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch.

(a) (2 Punkte) Zu einem näherungsweise bestimmten Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^N$ von $A$ soll der zugehörige Eigenwert $\lambda$ bestimmt werden, so dass $\|Ax - \lambda x\|_2^2$ minimal wird. Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $\lambda$ an.

$A$ habe weiterhin die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(b) (2 Punkte) $\lambda_1 x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_n x^T x$.

(c) (1 Punkt) $\lambda_1 = \min\limits_{x\neq 0} \dfrac{x^T A x}{x^T x} = \min\limits_{x^T x = 1} x^T A x$.

(d) (1 Punkt) $\lambda_N = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{x^T A x}{x^T x} = \max\limits_{x^T x = 1} x^T A x$.

**Aufgabe 15** (Eigenwertberechnung) **4 Punkte**

(a) (2 Punkte) Seien $u, v \in \mathbb{R}^N$, $u^T v \neq -1$. Damit ist $I + uv^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regulär. Zeigen Sie:

$$(I + uv^T)^{-1} = I - \frac{uv^T}{1 + v^T u}\,.$$

(b) (2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine Matrix von der Form

$$A = (I - 2vv^T)D(I - 2vv^T) \quad \text{mit} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{N\times N}, \quad v \in \mathbb{R}^n, v^T v = 1\,.$$

Zeigen Sie: $A$ ist symmetrisch und für $j = 1, \ldots, N$ ist $\lambda_j$ ein Eigenwert von $A$, so dass die $j$-te Spalte von $I - 2vv^T$ der zugehörige Eigenvektor ist.

**Aufgabe 16** ($QR$-Transformation) **2 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ zerlegt in $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Die $QR$-Transformation ist als $A' := RQ$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) $A'$ ist ähnlich zu $A$, besitzt also insbesondere dieselben Eigenwerte.

(b) (1 Punkt) Wenn $A$ symmetrisch ist, so ist auch $A'$ symmetrisch.

**Aufgabe 17** (Householder-Transformation) **2 Punkte**

Gegeben sei $v \in \mathbb{R}^N$ und die Householder-Transformation

$$H = I - \frac{2}{v^T v} vv^T\,.$$

Zeigen Sie:

(a) (0.5 Punkte) $H$ ist symmetrisch.

(b) (0.5 Punkte) $H$ ist orthogonal, das heißt $H^{-1} = H^T$.

(c) (1 Punkt) $H$ besitzt die Eigenwerte $1$ (mit Vielfachheit $N-1$) und $-1$ (mit Vielfachheit $1$).

**Aufgabe 18** (Potenzmethode / Vektoriteration) **2 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_N|$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r, \quad |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}|\,,$$

sowie $w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1$.

Zeigen Sie mit Hilfe der ersten Aussage von Satz 5.3

$$\|x^k - \operatorname{sign}(\lambda_1)^k \frac{w}{\|w\|}\| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

die zweite Aussage: Wenn zur Normierung in der Vektoriteration

$$z^k = Ax^{k-1}, \quad x^k = \frac{z^k}{\|z^k\|}$$

die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ verwendet wird, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \langle Ax^k, x^k\rangle_2 = \lambda_1\,.$$

**Hinweis:** Setzen Sie $x^k = \operatorname{sign}(\lambda_1)^k \frac{w}{\|w\|_2} + d_k$ mit $\|d_k\|_2 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Abgabe der Übungsblätter:**

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, den 21.06.2012, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern.

**Service/Material:**

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainfing2012s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

**Sprechstunden:**

Prof. Dr. Andreas Rieder: Donnerstag, 11.30-12.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Dienstag, 13.30-14.30 Uhr und nach Vereinbarung