Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen — Übungsblatt 6

Sommersemester 2012

Aufgabe 19 (Newton-Verfahren) **2 Punkte**

Die zweimal stetig differenzierbare Funktion g sei in $I = [x_0, \xi]$ streng monoton fallend und streng konvex (d.h. $g'' > 0$ in I). Außerdem gelte $g(\xi) = 0$. Zeigen Sie:

(a) (0.5 Punkte) ξ ist die einzige Nullstelle von g in I.

(b) (1.5 Punkte) Die Iterierten x_k, $k \geq 0$, des Newton-Verfahrens mit Startwert x_0 konvergieren streng monoton wachsend gegen ξ.
Anleitung: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion $x_{k+1} \in [x_0, \xi]$ für $k \geq 0$. Zeigen Sie dazu:

  (i) Für $x_k \in I$ gilt $x_k < x_{k+1}$.

  (ii) Für $x_k \in I$ gilt $x_{k+1} \leq \xi$ (unter Verwendung des Mittelwertsatzes).

  (iii) Begründen Sie, warum $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ gilt.

Aufgabe 20 (Banachscher Fixpunktsatz) **5 Punkte**

Gegeben seien die beiden Funktionen $g(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x})$ und $h(y) = \frac{1}{6}(5y + e^{-y})$.

(a) (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass sowohl $g(x)$ als auch $h(y)$ jeweils im Intervall $[0,1]$ genau einen Fixpunkt x^* bzw. y^* besitzen und dass die jeweilige Fixpunktiteration $x_{k+1} := g(x_k)$ bzw. $y_{k+1} := h(y_k)$ für jeden Startwert $x_0 \in [0,1]$ bzw. $y_0 \in [0,1]$ gegen x^* bzw. y^* konvergiert.

(b) (2.5 Punkte) Beweisen Sie, dass $x^* = y^*$ gilt.
Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens $x_{k+1} := g(x_k)$ bzw. des Verfahrens $y_{k+1} := h(y_k)$ müssen mindestens durchgeführt werden, um $|x_k - x^*| < 10^{-3}$ bzw. $|y_k - y^*| < 10^{-3}$ garantieren zu können (Startwerte: $x_0 = y_0 = 0$)?

Aufgabe 21 (Banachscher Fixpunktsatz #2) **3 Punkte**

Beweisen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes unter Verwendung der Iterationsfunktion $\varphi(x) = \sqrt{2+x}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ Quadratwurzeln}} = 2 .$$

Aufgabe 22 (Banachscher Fixpunktsatz #3) **2 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$g\colon x \to \sqrt{1+x^2} .$$

Zeigen Sie, dass auf $D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ Folgendes gilt:

(a) (0.5 Punkte) $g(D) \subseteq D$

(b) (0.5 Punkte) $|g(x) - g(y)| < |x - y|, \quad x, y \in D, x \neq y$

(c) (0.5 Punkte) g hat keinen Fixpunkt in D.

(d) (0.5 Punkte) Wieso ist das kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

Aufgabe 23 (Newton-Verfahren #2) **4 Punkte**

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 4 \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ für jeden Startvektor $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T \in [1,2] \times [1,2] \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert.

(b) (1 Punkt) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (1,1)^T$ zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens durch und berechnen Sie sowohl die a-priori als auch die a-posteriori Fehlerabschätzung für $\|x^{(2)} - x^*\|_\infty$.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **Donnerstag, den 05.07.2012, 18.00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker** im 1.OG des ehemaligen Allianz-Gebäudes einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern.

Service/Material:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numainfing2012s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch aktuelle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder: Donnerstag, 11.30-12.30 Uhr und nach Vereinbarung
Dipl.-Math. techn. Daniel Maurer: Dienstag, 13.30-14.30 Uhr und nach Vereinbarung