Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer

Numerische Mathematik I (SS 2006)

Scheinklausur — 28. Juli 2006

Aufgabe 1:

(a) Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} x_0 &= 4\,, \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right)\,,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen 2 konvergiert.

(b) Die Funktion $\ln x$ soll an der Stelle $x = a > 0$ näherungsweise berechnet werden. Dazu wird das Newton-Verfahren auf die Funktion

$$f(x) = e^x - a$$

angewandt. Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an und zeigen Sie, daß quadratische Konvergenz vorliegt. Kann man sogar die Konvergenzordnung $p = 3$ erwarten?

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $s_{\alpha,\beta,\gamma} : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_{\alpha,\beta,\gamma}(x) := \begin{cases} (x+1)^4 + \alpha(x-1)^4 + 1, & -1 \le x \le 0 \\ -x^3 - 8\alpha x + \gamma, & 0 < x \le 1 \\ \beta x^3 + 8x^2 + \frac{11}{3}, & 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so, daß $s_{\alpha,\beta,\gamma}$ ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\Delta := \{-1, 0, 1, 2\}$ ist.

Aufgabe 3:

(a) Sei $N(\cdot)$ die *lub*-Norm im $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $N(A) < 1$. Aus der Übung ist bekannt, daß dann $(I + A)^{-1}$ existiert. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{1 + N(A)} \le N((I + A)^{-1}).$$

(b) Zeigen Sie, daß der Spektralradius $\rho(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ keine Matrixnorm darstellt.

Aufgabe 4:

(a) Gegeben seien die vier Wertepaare $(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, 3$:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	3	0	5	-2

Bestimmen Sie dasjenige Polynom zweiten Grades $p \in \mathcal{P}_2$, welches die Summe der Fehlerquadrate

$$\Phi(p) := \sum_{i=0}^{3} |y_i - p(x_i)|^2$$

minimiert.

(b) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5:

(a) Gegeben sei die Nullfolge $\{y_n\},\ n \in \mathbb{N}$, durch $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\, dx.$

(i) Zeigen Sie die Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} y_0 &= \ln(1.2), \\ y_n + 5y_{n-1} &= \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(ii) Bestimmen Sie den absoluten Fehler und die Kondition der Rekursion im n-ten Schritt, wenn man zur Berechung von y_n mit dem fehlerbehafteten Wert $\tilde{y}_0$ anstelle von y_0 startet. Wie läßt sich dieser absolute Fehler reduzieren?

(b) Warum ist die Berechnung von $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2},\ |x| < \varepsilon$, instabil bezüglich des relativen Fehlers? Geben Sie einen stabilen äquivalenten Ausdruck an.

Aufgabe 6:

Gegeben seien die Funktion $f(x) = \frac{12}{x+2},\ x \in [-1, 2]$, und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 in der Newton-Darstellung.

(b) Beweisen Sie für das Interpolationspolynom p_3 aus (a) die Fehlerabschätzung

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_3(x)| \le \frac{9}{2}.$$