



Numerische Mathematik I (SS 2006)

11. Übungsblatt — 30. Juni 2006

Aufgabe 37: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei die Tridiagonalmatrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad n > 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren von A_n die Gestalt

$$z_k^{(n)} = \left(\sin \frac{\pi k}{n+1}, \sin \frac{2\pi k}{n+1}, \dots, \sin \frac{n\pi k}{n+1} \right)^T$$

haben und $\lambda_k^{(n)} = 2(1 - \cos(\frac{k\pi}{n+1}))$, $k = 1, \dots, n$ die zugehörigen Eigenwerte sind.

(b) Berechnen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_{N_p}(A_n)$.

(c) Welche Konvergenzfaktoren erhält man für das Gesamtschrittverfahren angewandt auf das lineare Gleichungssystem $A_n x = b$ in Abhängigkeit von n ?

Aufgabe 38: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Gegeben seien folgende Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)^6, \\ f_2(x) &= (3-2x)^3, \\ f_3(x) &= (99+70x)^{-1}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie zunächst $f_1(\sqrt{2}) = f_2(\sqrt{2}) = f_3(\sqrt{2})$ und bestimmen Sie unter Verwendung von $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ die Konditionszahlen von f_1 , f_2 und f_3 bezüglich der Stelle $x = \sqrt{2}$.

(b) Gegeben sei $f(x) = \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)^{\frac{1}{2}}$ mit einer Störung in $\cos x$.

Untersuchen Sie die Kondition von f bezüglich dieser Störung mit absolutem und relativem Fehler. Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ wird der Fehler extrem verstärkt?

Aufgabe 39: (mündlich)

- (a) Berechnen Sie durch Gauß-Elimination (ohne Zeilen- und Spaltenvertauschung) die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

exakt (mit Hilfe rationaler Zahlen).

- (b) Berechnen Sie auf demselben Weg, aber mit zweistelliger Gleitkomma-Arithmetik die Lösung der folgenden äquivalenten Gleichungssysteme:

(a) $\begin{pmatrix} 0.005 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.005 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 40: (mündlich)

Mit Festkommazahlen soll eine Näherung N für die Zahl $\sin 1$ mit Hilfe der Taylor-Entwicklung berechnet werden.

Bestimmen Sie die notwendige Anzahl der Nachkommastellen t sowie der Taylor-Glieder k , so dass der absolute Fehler $|\sin 1 - N|$ kleiner als 10^{-5} ist.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 7. Juli 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitzen „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen (**Druckbuchstaben**) und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.