Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

Numerische Mathematik I (SS 2006)

12. Übungsblatt — 7. Juli 2006

Aufgabe 41: (schriftlich zu bearbeiten)

Es sei

$$I_m := \int_0^1 (1-t)^m \sin t \, dt \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

(a) Beweisen Sie die Rekursionsformel

$$I_0 = 1 - \cos 1,\ I_1 = 1 - \sin 1,\ I_{m+2} = 1 - (m+1)(m+2)I_m \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

(b) Gegeben sei der mit einem Fehler behaftete Startwert $\tilde{I}_0 = 0.4600$ mit $\Delta I_0 = |I_0 - \tilde{I}_0| < 5 \cdot 10^{-4}$. Aus $\tilde{I}_0$ lässt sich nun gemäß der Rekursionsformel aus (a) eine Folge von Näherungen $\{\tilde{I}_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ konstruieren. Geben Sie eine Abschätzung für den absoluten Fehler $\Delta I_{10} = |I_{10} - \tilde{I}_{10}|$ an und erläutern Sie die Kondition des Problems.

(c) Zeigen Sie, dass $0 < I_m < \dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$, $(m = 0, 1, \ldots)$ gilt.

(d) Mit der umgeformten Rekursionsformel

$$I_m = \frac{1 - I_{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \quad (m = 18, 17, \ldots)$$

lässt sich aus dem Startwert $\hat{I}_{20} = 0$ (d.h. $\Delta I_{20} = |I_{20} - \hat{I}_{20}| < 5 \cdot 10^{-2}$) ebenfalls eine Näherung $\hat{I}_{10}$ für I_{10} berechnen.
Geben Sie auch hier eine Abschätzung für $\Delta I_{10} = |I_{10} - \hat{I}_{10}|$ an und erläutern die Kondition.

(Hinweis: $3 \cdot 10^6 < 10! < 4 \cdot 10^6$ und $20! > 2 \cdot 10^{18}$).

Aufgabe 42: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Spalten $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^n$ und den Zeilen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^n$, d.h. $A = (s_1, \ldots, s_n) = (z_1, \ldots, z_n)^T$, sowie die Diagonalmatrizen $D_s = \mathrm{diag}(\|s_i\|_1^{-1} : 1 \le i \le n)$ und $D_z = \mathrm{diag}(\|z_i\|_1^{-1} : 1 \le i \le n)$.
Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} cond_{N_S}(AD_s) &= \min_{D\in\mathcal{D}} cond_{N_S}(AD), \\ cond_{N_Z}(D_zA) &= \min_{D\in\mathcal{D}} cond_{N_Z}(DA). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{D}$ die Menge der regulären $n \times n$-Diagonalmatrizen.

Aufgabe 43: (mündlich)

Sei x die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ und y die Lösung des gestörten Systems $(A+\Delta A)y = b+\Delta b$ mit $\|\Delta b\| \leq \delta\|b\|$ und $N(\Delta A) \leq \delta N(A)$, wobei $N(\cdot)$ die *lub*-Norm bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Falls $N(A) < 1$ ist, dann existiert $(I + A)^{-1}$ und es gilt die Abschätzung

$$N((I + A)^{-1}) \leq \frac{1}{1 - N(A)}.$$

(b) Ist $\delta\, cond(A) < 1$, dann gilt

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq \frac{\delta}{1 - \delta\, cond(A)} \cdot \left(cond(A) + \frac{N(A^{-1})\,\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \right).$$

Aufgabe 44: (mündlich)

Zu einer gegebenen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird das Integral $If = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet.

Die Funktion f kann dabei nicht exakt ausgewertet werden, statt $f(x)$ erhält man den gestörten Funktionswert $\tilde{f}(x)$ mit $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und einem $\varepsilon > 0$.

Zur näherungsweisen Berechnung von If wird die Quadraturformel $Q_s f$ verwendet mit $Q_s f = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \omega_i f(x_i), \quad \omega_i \in \mathbb{R}, x_i \in [a, b], i = 1, \ldots, s$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \omega_i = b - a.$

(a) Schätzen Sie $|If - I\tilde{f}|$ ab und geben Sie die Kondition von If an.

(b) Schätzen Sie $|Q_s f - Q_s\tilde{f}|$ ab und geben Sie die Kondition von $Q_s f$ an.

(c) Unter welcher zusätzlichen Bedingung an die Gewichte ω_i ist die Quadraturformel $Q_s f$ stabil?

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 14. Juli 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen **(Druckbuchstaben)** und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.