Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

Numerische Mathematik I (SS 2006)

13. Übungsblatt — 14. Juli 2006

Aufgabe 45: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{2}{3+x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ und die Knoten $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

(a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_3 vom Grad 3 zu f in Newton-Gestalt und in Lagrange-Darstellung.

(b) Skizzieren Sie $f(x)$ und $p_3(x)$, sowie die in (a) benötigten Lagrange-Grundfunktionen.

(c) Durch Hinzunahme des Knotens $x_4 = 3$ soll f in $[-2, 3]$ interpoliert werden. Bestimmen Sie das neue Interpolationspolynom p_4 vom Grad 4 mit möglichst geringem Aufwand.

(d) Beweisen Sie für das Interpolationspolynom p_3 aus (a) die Fehlerabschätzung

$$\max_{x \in [-2,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq 8.$$

Aufgabe 46: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Gegeben seien $n+1$ Knoten $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ im Intervall $[a, b]$ sowie die zugehörigen Lagrange-Grundfunktionen $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$. Außerdem sei $c_i := l_i(0)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Zeigen Sie

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \ldots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, & j = n+1. \end{cases}$$

(b) Es gelten die Voraussetzungen aus Teil (a). Außerdem sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit $|f^{(i)}(x)| \leq M$ für alle $i \geq 0$ und alle $x \in [a, b]$.

Zeigen Sie, dass die Folge der Interpolationspolynome $\{p_n(x)\}_{n \geq 1}$ für $n \to \infty$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, völlig unabhängig von der Wahl der Knoten.

Aufgabe 47: (mündlich)

Im Intervall $[a,b]$ seien die äquidistanten Knoten $x_i = a + ih,\ h = \frac{b-a}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n$ gegeben.

Zu einer stetigen Funktion $f \in C([a,b])$ ist der interpolierende Polygonzug s_f (Spline vom Grad 1) definiert durch:

(i) $s_f(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$,

(ii) $s_f|_{[x_i, x_i+1]}$ ist ein Polynom ersten Grades für $i = 0, \ldots, n-1$.

Zeigen Sie:

Für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^2([a,b])$ gilt

$$\|f - s_f\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty.$$

Aufgabe 48: (mündlich)

Gegeben seien die paarweise verschiedenen Knoten $x_i \in [a,b]$ $(i = 0, \ldots, n)$ und eine Funktion $f \in C^1([a,b])$.

Gesucht ist ein Polynom p vom Grad $2n+1$ mit

$$p(x_i) = f(x_i),\ p'(x_i) = f'(x_i),\ i = 0, \ldots, n \ \text{(Hermite-Interpolation)}.$$

(a) Ermitteln Sie unter Verwendung der Lagrange-Grundfunktionen die zugehörigen Grundpolynome s_i und t_i $(i = 0 \ldots, n)$ vom Grad $2n+1$, definiert durch die Bedingungen

$$\begin{array}{rclrcll} s_i(x_j) & = & \delta_{ij}, & t_i(x_j) & = & 0, & \\ s_i'(x_j) & = & 0, & t_i'(x_j) & = & \delta_{ij}, & i,j = 0, \ldots, n. \end{array}$$

(b) Geben Sie das Interpolationspolynom p an und beweisen Sie seine Eindeutigkeit.

(c) Sei $f \in C^{2n+2}([a,b])$ gegeben.

Zeigen Sie für das resultierende Interpolationspolynom p die Fehlerdarstellung

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \qquad \text{für ein } \xi \in [a,b].$$

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 21. Juli 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen **(Druckbuchstaben)** und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.