



Numerische Mathematik I (SS 2006)

14. Übungsblatt — 21. Juli 2006

Aufgabe 49: (mündlich)

(a) Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = |x|$ in den Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ durch

(i) einen kubischen Spline s_1 mit den Randbedingungen

$$s_1''(x_0) = s_1''(x_2) = 0,$$

(ii) einen kubischen Spline s_2 mit den Randbedingungen

$$s_2'(x_0) = f'(x_0), \quad s_2'(x_2) = f'(x_2) \quad \text{und}$$

(iii) ein Polynom p vom Grad 4 mit den Randbedingungen

$$p'(x_0) = f'(x_0), \quad p'(x_2) = f'(x_2).$$

(b) Berechnen Sie jeweils den Interpolationsfehler zu f in $[-1, 1]$ bzgl. der Maximumnorm, d.h. $\|f - s_1\|_\infty$, $\|f - s_2\|_\infty$ und $\|f - p\|_\infty$.

(c) Skizzieren Sie $f(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x)$ und $p(x)$.

Aufgabe 50: (mündlich)

Gegeben sei

$$J := \int_{-2}^2 5^x dx = \frac{624}{25 \cdot \ln 5} = 15.5085 \dots$$

(a) Nähern Sie J mit der Trapez- und Kepler-Regel sowie mit den dazugehörigen zusammengesetzten Formeln zur Schrittweite $h = 1$ an.

(b) Schätzen Sie für jede dieser Näherungen den Fehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

(c) Bestimmen Sie die ersten drei Zeilen des Romberg-Schemas zur Berechnung von J .

Aufgabe 51: (mündlich)

- (a) Wie sind die inneren Knoten $-1 < x_2 < \dots < x_s < 1$ der $(s+1)$ -punktigen Quadraturformel

$$Q_s(f) = \sum_{k=1}^{s+1} w_k f(x_k)$$

zu wählen, damit unter den Bedingungen $x_1 = -1$ und $x_{s+1} = 1$ für alle Polynome p vom Grad $2s - 1$ gilt:

$$Q_s(p) = \int_{-1}^1 p(x) dx$$

- (b) Berechnen Sie für $s = 3$ explizit die Knoten und Gewichte obiger Quadraturformel.

Keine Abgabe!