Universität Karlsruhe (TH)
**Institut für Praktische Mathematik**

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

# Numerische Mathematik I (SS 2006)

## 1. Übungsblatt — 28. April 2006

**Aufgabe 1:** (mündlich)

Gegeben seien die Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

(i) $f$ heißt von der Ordnung "groß $O$" von $g$ für $x \to x_0$, falls $f(x)/g(x)$ um $x_0$ beschränkt bleibt.

Schreibweise: $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$.

(ii) $f$ heißt von der Ordnung "klein $o$" von $g$ für $x \to x_0$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$ ist.

Schreibweise: $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$.

Die Abkürzungen "$o$" und"$O$" heißen Landau-Symbole.

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $f(x) = o(g(x)) \;\Rightarrow\; f(x) = O(g(x))$,

(b) $f(x) = K \cdot O(g(x))$ für ein festes $K \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x) = O(g(x))$,

(c) $f_1(x) = O(g_1(x))$ und $f_2(x) = O(g_2(x)) \;\Rightarrow\; f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$,

(d) $f(x) = O(g_1(x)\, g_2(x)) \;\Rightarrow\; f(x) = g_1(x) \cdot O(g_2(x))$.

**Aufgabe 2:** (mündlich)

Gegeben sei eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

(a) $\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h)$ (für $h \to 0$), (vorwärtsgenommener Differenzenquotient),

(b) $\dfrac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2)$ (für $h \to 0$), (zentraler Differenzenquotient).

**Aufgabe 3:** (mündlich)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y'' - p(t)y' - q(t)y = r(t)\ , \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

mit $p, q, r$ stetig und $q(t) \geq Q > 0,\ |p(t)| \leq P$ für $a \leq t \leq b$.

Gesucht sind Näherungswerte $y_i$ für die exakten Werte $y(t_i),\ i = 1, \dots, n-1$ mit $t_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Mit Hilfe der zentralen Differenzen

$$\begin{aligned} y'(t_i) &\approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \\ y''(t_i) &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \end{aligned}$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$Ax = c\ , \quad x = (y_1, \dots, y_{n-1})^T.$$

Bestimmen Sie die Matrix $A$ und den Vektor $c$.