



## Numerische Mathematik I (SS 2006)

### 2. Übungsblatt — 28. April 2006

**Aufgabe 4:** (schriftlich zu bearbeiten)

Es sei

$$f((x, y)^T) = \left( \frac{3x}{1+x} + \frac{1}{y}, \frac{3y}{1+y} + \frac{2}{x} \right)^T.$$

- (a) Finden Sie, ohne die Ableitung von  $f$  zu verwenden, eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , welche den Punkt  $(x_0, y_0) = (2, 2)$  enthält, und in der  $f$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_\infty$  den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.
- (b) Führen Sie mit  $(x_0, y_0) = (2, 2)$  zwei Iterationen durch und geben Sie eine a-posteriori Fehlerabschätzung für  $(x_2, y_2)$  an.

**Aufgabe 5:** (schriftlich zu bearbeiten)

Die Gleichung

$$2 + \frac{x}{2} + \ln(x) = 0 \tag{1}$$

läßt sich auf verschiedene Arten in Fixpunktform überführen. Betrachten Sie die beiden Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = -2(2 + \ln(x_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = e^{-2 - \frac{x_n}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

und zeigen Sie:

- (a) Die Gleichung (1) besitzt in  $(0, \frac{1}{e})$  genau eine Lösung  $x^*$ .
- (b) Das Iterationsverfahren (2) konvergiert für kein  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x^*\}$ .
- (c) Das Iterationsverfahren (3) konvergiert für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 6:** (mündlich)

$(E, d)$  sei ein vollständiger metrischer Raum und  $\varphi : E \rightarrow E$  erfülle die schwache Kontraktionsbedingung, d.h.

$$\forall x, y \in E, x \neq y : d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x, y).$$

Zeigen Sie:

- (a)  $\varphi$  besitzt höchstens einen Fixpunkt  $x^* \in E$ .
- (b) Ist  $(E, d)$  kompakt, dann besitzt  $\varphi$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in E$ .

**Aufgabe 7:** (mündlich)

Zeigen Sie, daß für die Funktion  $g : x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$  auf der abgeschlossenen Teilmenge  $D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$  gilt:

- (a)  $g(D) \subseteq D$ ,
- (b)  $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ ,  $x, y \in D$ ,  $x \neq y$ ,
- (c)  $g$  hat keinen Fixpunkt in  $D$ .

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz ?

**Abgabe** der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 5. Mai 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitzen „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen (**Druckbuchstaben**) und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.