Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

Numerische Mathematik I (SS 2006)

3. Übungsblatt — 5. Mai 2006

Aufgabe 8: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 - 4 \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren zur Lösung von $F(x) = 0$ für jeden Startvektor $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T \in [1,2] \times [1,2] \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert und quadratische Konvergenz vorliegt.

(b) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (1,1)^T$ zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens durch und berechnen Sie sowohl die a-priori als auch die a-posteriori Fehlerabschätzung für $\|x^{(2)} - x^*\|_\infty$.

Aufgabe 9: (schriftlich zu bearbeiten)

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* in $[a,b]$, wenn

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

für alle $x, y \in [a,b]$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) $f \in C^1[a,b]$ ist konvex in $[a,b]$ genau dann, wenn

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x)$$

für alle $x, y \in [a,b]$ gilt.

(b) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ konvex, $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und f besitze eine Nullstelle x^* mit $f'(x^*) \neq 0$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen x^* und es gilt

$$x^* \leq x_{n+1} \leq x_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Aufgabe 10: (mündlich)

Die Abbildung

$$\varphi : I \to \mathbb{R},\ I := [a,b] \subseteq \mathbb{R},$$

erfülle die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit der Kontraktionskonstante $0 < L < 1$. Der Fixpunkt x^* liege in (a,b), d.h. es gibt ein $\rho > 0$ mit $[x^* - \rho, x^* + \rho] \subseteq I$.

Bei der Durchführung der Fixpunktiteration $x_{n+1} := \varphi(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$, kann $\varphi(x)$ nicht exakt ausgewertet werden: Statt $\varphi(x)$ erhält man den „gestörten" Funktionswert

$$\varphi(x) + \delta(x) \text{ mit } |\delta(x)| \leq \delta \text{ für alle } x \in I \text{ und einem } \delta > 0.$$

Demzufolge liefert die Iteration die „gestörte" Folge $\{\tilde{x}_n\}_{n\geq 0}$ gemäß

$$\tilde{x}_0 := x_0 \text{ und } \tilde{x}_{n+1} := \varphi(\tilde{x}_n) + \delta(\tilde{x}_n).$$

Zeigen Sie:

Ist $\rho_0 := \rho - \frac{\delta}{1-L} \geq 0$ und $x_0 = \tilde{x}_0 \in [x^* - \rho_0, x^* + \rho_0]$, so gelten folgende Aussagen:

(a) $\tilde{x}_n \in [x^* - \rho, x^* + \rho]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

(b) $|\tilde{x}_n - x^*| \leq \dfrac{\delta}{1-L} + L^n(\rho_0 - \dfrac{\delta}{1-L})$.

Aufgabe 11: (mündlich)

Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} s_0 &= 0\ , \\ s_n &= \sqrt{2 + s_{n-1}}\ , \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 12. Mai 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II" neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen **(Druckbuchstaben)** und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.