Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

Numerische Mathematik I (SS 2006)

4. Übungsblatt — 12. Mai 2006

Aufgabe 12: (schriftlich zu bearbeiten)

Es sei $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Zeigen Sie, dass die Δ^2-Methode von Aitken die Folge $\{y_n\}_{n\geq 0}$ mit

$$y_n = x_n + \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1} - a_{n+2}}, \; n \geq 0$$

liefert.

(b) Betrachten Sie speziell $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 = 0.6931471805599\ldots$ und zeigen Sie

$$y_n = x_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}, \; n \geq 1.$$

Berechnen Sie $x_1, \ldots, x_5$ und $y_1, \ldots, y_4$ für diese Reihe.

Aufgabe 13: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = 2x^7 - 20x^6 + 68x^5 - 82x^4 + 10x^3 + 50.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_7$ in der Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{7} b_k (x-3)^k.$$

(b) Entwickeln Sie das Polynom

$$p(x) = (x-2)^4 - 3(x-2)^2 + (x-2) + 1$$

mit dem vollständigen Hornerschema um in Potenzen von x und lesen Sie daraus $p(0), p'(0), \ldots, p^{(4)}(0)$ ab.

(c) Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6 - 3x^5 + 20x^3 - 61x^2 - 137x - 780 \quad \text{und} \\ q(x) &= x^2 - 4x + 13. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des doppelzeiligen Hornerschemas, dass q ein Teiler von p ist.

Aufgabe 14: (mündlich)

(a) Wählen Sie die Konstanten p und q so, dass die Iterationsfolge $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ mit

$$\varphi(x) = px + q\frac{a}{x^2}$$

lokal gegen $\sqrt[3]{a}$ konvergiert und das Verfahren größtmögliche Konvergenzordnung besitzt.

(b) Wählen Sie die Konstanten r, s und t so, dass die Iterationsfolge $y_{k+1} = \rho(y_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ mit

$$\rho(x) = rx + s\frac{a}{x^2} + t\frac{a^2}{x^5}$$

lokal gegen $\sqrt[3]{a}$ konvergiert und das Verfahren größtmögliche Konvergenzordnung besitzt.

(c) Führen Sie ausgehend von $x_0 = y_0 = 3$ für $a = 8$ fünf Schritte der beiden Verfahren aus und protokollieren Sie den Fehler.

Aufgabe 15: (mündlich)

Die Funktion $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar mit $|\varphi'(x)| > 1$ für $x \in I$ und $I \subset \varphi(I)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} von φ existiert und differenzierbar ist mit $|(\varphi^{-1})'(x)| < 1$ für $x \in \varphi(I)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion φ genau einen Fixpunkt $x^* \in I$ besitzt und die Iteration

$$x_{n+1} = \varphi^{-1}(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in I$ gegen x^* konvergiert.

(c) Konvergiert die Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Startwert $x_0 \neq x^*$ gegen x^*?

(d) Geben Sie für die Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{2}\tan x$ ein Intervall $I \subset (0, \frac{\pi}{2})$ an, für welches die obigen Voraussetzungen erfüllt sind.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 19. Mai 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen **(Druckbuchstaben)** und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.