Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

Numerische Mathematik I (SS 2006)

5. Übungsblatt — 19. Mai 2006

Aufgabe 16: (schriftlich zu bearbeiten)

Die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$ sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in [-1,1]$ durch $T_n(x) := \cos(n \arccos(x))$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, mit $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$.

(b) Die T_n sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ und es gilt $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi$ und $\langle T_n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die T_n genügen auf $[-1,1]$ der Differentialgleichung $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Entwicklung

$$2^{n-1}x^n = T_n(x) + \binom{n}{1} T_{n-2}(x) + \binom{n}{2} T_{n-4}(x) + \cdots + \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} T_0(x), & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \binom{n}{(n-1)/2} T_1(x), & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Aufgabe 17: (schriftlich zu bearbeiten)

(a) Gegeben sei die Funktion $s : [-1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$s(x) := \begin{cases} (\alpha x - 1)(x^3 + \beta x), & -1 \leq x < 0, \\ \varepsilon x^3 + 2x - \gamma, & 0 \leq x < 1, \\ \delta x^2 (x-1) + x + \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ so, dass s ein kubischer Spline bezüglich des Gitters $\Delta = \{-1, 0, 1, 2\}$ ist.

(b) Konstruieren Sie bezüglich des Gitters $\Delta = \{0, 1, 2, 3\}$ einen kubischen Spline $s : [0,3] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$s(0) = s'(0) = 0,\ s(1) = s'(1) = 1,\ s(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \text{ und } s(\frac{5}{2}) = \frac{51}{8}.$$

Aufgabe 18: (mündlich)

(a) Entwickeln Sie das Polynom $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ nach Tschebyscheff-Polynomen, d.h. bestimmen Sie in der Darstellung $p(x) = \sum_{j=0}^{5} c_j T_j(x)$ die Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_5$, und schätzen Sie den Fehler $\|p - \sum_{j=0}^{3} c_j T_j\|_\infty$ auf $[-1, 1]$ ab.

(b) Sei $D_n(u) := \sum_{k=-n}^{n} e^{iku}$.
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in (0, 2\pi)$

(a) $D_n(u) = 1 + 2\cos(u) + \cdots + 2\cos(nu)$,

(b) $D_n(u) = \dfrac{\sin(\frac{2n+1}{2}u)}{\sin(\frac{u}{2})}$.

Aufgabe 19: (mündlich)

Gegeben sei ein nach Tschebyscheff-Polynomen entwickeltes Polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x), \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Der Auswertungsalgorithmus von Clenshaw für p_n lautet:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + 2x_0 b_n \\ b_{n-i} &= a_{n-i} + 2x_0 b_{n-i+1} - b_{n-i+2}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ b_0 &= a_0 + x_0 b_1 - b_2. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $p_n(x_0) = b_0$ für $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Werten Sie das Polynom

$$p_6(x) = 5T_6(x) + 2T_5(x) + 3T_4(x) - T_3(x) - 4T_2(x) + T_1(x) - 10$$

an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ aus.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 26. Mai 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen **(Druckbuchstaben)** und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.